



**União das Faculdades de Alta Floresta - UNIFLOR**

Rua T-2, s/n – Caixa Postal n.º 431 – Fone (066) 521-1676  
CEP 78.580-000 - Alta Floresta-MT

**Faculdade de Ciências Contábeis de Alta Floresta**

---

**CURSO: ESPECIALIZAÇÃO EM GESTÃO FINANCEIRA**

**MÓDULO**

# Gestão Financeira

Prof. Wagner José Trevelim  
w.trevelim@brturbo.com.br

## SUMARIO

<b>1 - INTRODUÇÃO</b>	<b>4</b>
<b>2 - CONCEITOS BÁSICOS</b>	<b>5</b>
2.1 - Capital	5
2.2 – Equivalência Monetária	5
2.3 – Juro e Taxa de Juro	6
2.4 – Prazo ou Período (n)	7
2.5 – Taxa de Risco	8
2.6 - Diagrama de Fluxo de Caixa	8
<b>3 - JUROS SIMPLES</b>	<b>10</b>
3.1 - Conceito	10
3.2 – Cálculo do Juro Simples (J)	10
3.3 – Valor Futuro - Montante - Valor do Resgate	10
3.4 - Taxas Equivalentes	12
3.5 - Juros Exatos e Juros Comerciais	13
<b>4 - DESCONTOS SIMPLES</b>	<b>16</b>
4.1 - Definição	16
4.2 – Desconto Comercial ou Por Fora	16
4.3 - Desconto Racional ou Por Dentro	17
4.4 – Comparação entre o Desconto Comercial e o Desconto Racional	20
<b>5 - JUROS COMPOSTOS</b>	<b>26</b>
5.1 Conceito	26

<b>5.2 – Cálculo do Montante – Valor Faturado (FV)</b> .....	<b>26</b>
<b>5.3 – Séries Uniformes – (PMT)</b> .....	<b>30</b>
5.3.1 – Séries Postecipadas .....	30
• Determinação do Valor Presente (PV) em Função da Anuidade (PMT) .....	30
• Determinação do Valor Futuro (FV) em Função da Anuidade (PMT) .....	31
<b>6 - ASSISTENTE DE FUNÇÃO DO EXCEL</b> .....	<b>34</b>
<b>7 – FLUXOS MONETÁRIOS E SEU EQUIVALENTE DESCONTADO: FMD</b> .....	<b>38</b>
7.1 - Caso 01: Marrecos & Cia. ....	39
7.2 - Caso 02: Investimento e Custo do Capital .....	40
7.3 - Caso 03: Ponto de Equilíbrio .....	41
<b>8 – SISTEMAS DE AMORTIZAÇÃO DE EMPRÉSTIMOS E FINANCIAMENTOS</b> -	<b>43</b>
<b>8.1 – Sistema Francês</b> .....	<b>43</b>
8.1.1 - Sem Prazo de Carência: .....	43
8.1.2 - Com Prazo de Carência e Sem Capitalização dos Juros: .....	43
8.1.3 - Com Carência e Capitalização de Juros:.....	44
<b>8.2 - Sistema Price</b> .....	<b>44</b>
<b>8.3 – Sistema de Amortização Constante (SAC) ou Sistema Hamburguês</b> .....	<b>45</b>
8.3.1 - Sem Prazo de Carência: .....	45
8.3.2 - Com Prazo de Carência.....	45
8.3.3 - Com Prazo de Carência e Capitalização de Juros no Saldo. ....	46
<b>8.4 – Sistema Misto</b> .....	<b>46</b>
<b>8.5 – Sistema Americano</b> .....	<b>46</b>
8.5.1 - Juros pagos na carência.....	46
8.5.2 - Juros capitalizados no saldo devedor.....	47
<b>8.6 – Exemplo: Planos Equivalentes de Financiamento</b> .....	<b>47</b>
<b>9 – CUSTO EFETIVO</b> .....	<b>49</b>
<b>10 – INTRODUÇÃO AOS MÉTODOS DE ANÁLISE DE INVESTIMENTOS</b> .....	<b>50</b>

<b>10.1 - Método da Taxa Interna de Retorno - IRR-----</b>	<b>50</b>
10.1.1 - Introdução-----	50
10.1.2 - Exemplos Numéricos - Dois Investimentos Mutuamente Exclusivos -----	50
<b>10.2 - Método do Valor Presente Líquido -----</b>	<b>51</b>
10.2.1 - O Método do Valor Presente Líquido -----	51
10.2.2 - Exemplos Numéricos - Dois Investimentos Mutuamente Exclusivos -----	52
<b>10.3 - Taxa Interna de Retorno X Valor Presente Líquido -----</b>	<b>53</b>
10.3.1 - Introdução-----	53
10.3.2 - Exemplos Numéricos - Dois Investimentos Mutuamente Exclusivos -----	53
<b>10.4 - Tempo de Recuperação ou Payback Period-----</b>	<b>58</b>
10.4.1 - Introdução-----	58
10.4.2 - Exemplos Numéricos - Dois Investimentos Mutuamente Exclusivos -----	58

## 1 - INTRODUÇÃO

Ao longo dos tempos constatou-se que o problema econômico dos governos; das instituições; das organizações e dos indivíduos, decorria da escassez de produtos e/ou serviços, pelo fato de que as necessidades das pessoas eram satisfeitas por bens e serviços cuja oferta era limitada. Ao longo do processo de desenvolvimento das sociedades, o problema de satisfazer as necessidades foi solucionado através da especialização e do processo de troca de um bem pelo outro, conhecido como escambo. Mais tarde surgiu um bem intermediário, para este processo de trocas que foi a moeda. Assim, o valor monetário ou preço propriamente dito, passou a ser o denominador comum de medida de valor dos bens e/ou serviços e a moeda um meio de acúmulo deste valor constituindo assim a riqueza ou capital.

Constatou-se assim, que os bens e os serviços poderiam ser consumidos ou guardados para o consumo futuro. Caso o bem fosse consumido ele desapareceria e, caso houvesse o acúmulo, surgiria decorrente deste processo o estoque que poderia servir para gerar novos bens e/ou riqueza através do processo produtivo. E começou a perceber que os estoques eram feitos não somente de produtos, mas de valores monetários também, que se bem administrado poderiam aumentar gradativamente conforme a utilidade temporal. Surge-se daí a preocupação e a importância do acúmulo das riquezas em valores monetários como forma de investimento futuro e aumento do mesmo conforme o surgimento das necessidades.

Com o passar dos tempos essa técnica foi sendo melhorada e aperfeiçoada conforme as necessidades de produção e tão quanto à necessidade mercantis que aflorava cada vez mais tornando os produtores mais competitivos quanto ao aumento de oferta de suas produções.

Atualmente a técnica utilizada para compreensão de como o capital se comporta em uma aplicação ao longo do tempo é realizado pela Matemática Financeira. De uma forma simplificada, podemos dizer que a Matemática Financeira é o ramo da Matemática Aplicada e/ou Elementar, que estuda o comportamento do dinheiro no tempo. A Matemática Financeira busca quantificar as transações que ocorrem no universo financeiro levando em conta, a variável tempo, quer dizer, o valor monetário no tempo (time value money).

As principais variáveis envolvidas no processo de quantificação financeira são: o capital, a taxa de juros e o tempo.

## 2 - CONCEITOS BÁSICOS

### 2.1 - Capital

Capital é todo o acúmulo de valores monetários em um determinado período de tempo constituindo assim a riqueza.

### 2.2 – Equivalência Monetária

Um valor monetário pode ser equivalente a outro valor diferente, num ponto diferente no tempo, sob certas condições específicas.

Este conceito afirma que o dinheiro muda de valor com o decorrer do tempo; R\$ 100,00 hoje não correspondem a R\$ 100,00 daqui a um ano. Intuitivamente, sabemos que R\$ 100,00 hoje valem mais que R\$ 100,00 daqui a um ano. A princípio, isso nos parece muito simples, porém, poucas pessoas conseguem explicar porque isso ocorre.

É aí que entra o juro. Os R\$ 100,00 hoje valem mais do que os R\$ 100,00 daqui a um ano porque esse capital poderia ficar aplicado em uma instituição financeira, e render juro que seria somado aos R\$ 100,00 resultando numa quantia, obviamente, maior que esse capital.

No exemplo: suponha que uma instituição financeira pague R\$ 10,00 de juros ao ano pelos R\$ 100,00 aplicados hoje. Isso quer dizer que, daqui a um ano, quando esse capital for resgatado, o valor recebido será de R\$ 110,00 e não somente os R\$ 100,00 iniciais.

Isso mostra que receber os R\$ 100,00 hoje seriam equivalentes a receber R\$ 110,00 daqui a um ano. Os juros de R\$ 10,00 referentes ao prazo de um ano e funcionam como uma recompensa pela espera desse tempo para ter o dinheiro em vez de tê-lo hoje.

Os juros fazem que uma determinada quantia, hoje, seja equivalente a outra no futuro. Apesar de diferentes nos números, no exemplo, os R\$ 100,00 de hoje e R\$ 110,00 daqui a um ano são equivalentes para uma taxa de juro de 10% ao ano. Sendo assim, o capital de R\$ 100,00 só será equivalente a R\$ 100,00 daqui a um ano na hipótese *absurda* da taxa de juro ser considerada igual a 0.

## 2.3 – Juro e Taxa de Juro

Vivemos em um mundo onde os recursos são limitados e escassos, sendo o capital um dos principais destes recursos. Sendo a oferta de recursos inferior a sua demanda ou necessidade, conclui-se que deva existir uma remuneração pelo uso do dinheiro emprestado. A remuneração do capital emprestado, no decorrer do tempo, denomina-se juro.

O juro (**J**) representa a remuneração pela utilização de capitais de terceiros, ou por prazos concedidos. Pode ser também a *remuneração do capital aplicado* nas instituições financeiras. Sendo considerados *rendimentos* quando recebidos, e *despesas* quando pagos.

A taxa de juro reflete a remuneração exigida por um agente econômico ao decidir postergar o consumo, transferindo seus recursos a outro agente.

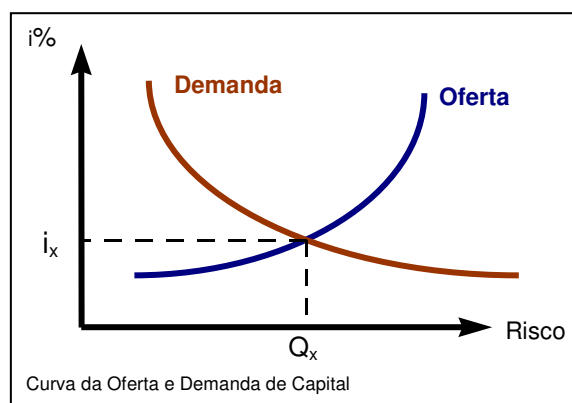
As taxas de juros são definidas por operações livremente praticadas no mercado, exprimindo a confiabilidade dos agentes econômicos com relação ao desempenho esperado da economia. São fixadas pelo Mercado Financeiro, por meio da Lei de Oferta e Procura de Capital.

As taxas juros são expressas como taxa percentual relativa a um dado período de tempo. Assim 10% ao ano correspondem à remuneração de uma unidade de capital, emprestado por um prazo igual ao prazo de referência da taxa.

Na intersecção da Curva de Oferta e Demanda, temos o equilíbrio de mercado, onde os ofertantes estão dispostos a ceder uma quantia  $x$  ( $Q_x$ ), e os tomadores estão dispostos a pagar uma taxa  $y$  ( $i_y$ ) de juros sobre a quantia emprestada.

Taxa de juro ( $i$ ) é o valor do juro em determinado tempo, expresso como percentagem do capital. Pode ser expresso da forma unitária (0,15) ou percentual (15%).

Veja:



Se uma instituição financeira paga R\$ 10,00 de juros sobre um capital de R\$ 100,00 aplicados durante um ano, a taxa de juros nada mais é que:  $\frac{10,00}{100,00} = 0,1$ , significando que essa instituição financeira está pagando uma taxa de juros de 10% ao ano.

A existência de Juro decorre de vários fatores, entre os quais se destacam:

- a) Inflação: a diminuição do poder aquisitivo da moeda num determinado período de tempo;
- b) Risco: os juros produzidos de certa forma compensam os possíveis riscos do investimento.
- c) Aspectos intrínsecos da natureza humana: quando ocorre de aquisição ou oferta de empréstimos a terceiros.

Costuma-se especificar taxa de juro anual, trimestral, semestral, mensal, entre outros, motivo pelo qual se deve especificar sempre o período de tempo considerado.

Quando a taxa de juros incide no decorrer do tempo, sempre sobre o capital inicial, dizemos que temos um sistema de capitalização simples (Juros simples). Quando a taxa de juros incide sobre o capital atualizado com os juros do período (montante), dizemos que temos um sistema de capitalização composta (Juros compostos).

Na prática, o mercado financeiro utiliza apenas os juros compostos, de crescimento mais rápido (veremos adiante, que enquanto os juros simples crescem segundo uma função do 1º grau – crescimento linear, os juros compostos crescem muito mais rapidamente – segundo uma função exponencial).

## 2.4 – Prazo ou Período (n)

As transações financeiras são feitas tendo como referência uma unidade de tempo (dia, mês, semestre e etc.) e uma taxa de juro cobrada nesse determinado tempo.

O período de uma transação é o tempo de aplicação de cada modalidade financeira. Podendo ser unitário ou fracionário.

Por exemplo, uma aplicação de 30 dias. O prazo dessa aplicação é unitário se a instituição financeira utilizar uma taxa específica para 30 dias. Isso quer dizer que  $n = 1$  (1 período), pois 30 dias foi o período considerado para a taxa de juros como sendo uma unidade de tempo.

A instituição financeira pode, ainda, considerar para essa aplicação uma taxa que corresponda a um período de um ano, por exemplo. Nessa situação, o prazo da aplicação (n) será de  $30/360$ , o que significa a proporção de tempo em relação há um ano, que foi considerado como unidade de tempo (tendo em vista que a taxa de juros é anual). Assim tem se um período fracionário, pois  $n = 30/360$ . Então, o prazo ou período considerado só pode ser definido se levarmos em consideração a taxa de juro, que pode ser definida para qualquer período.

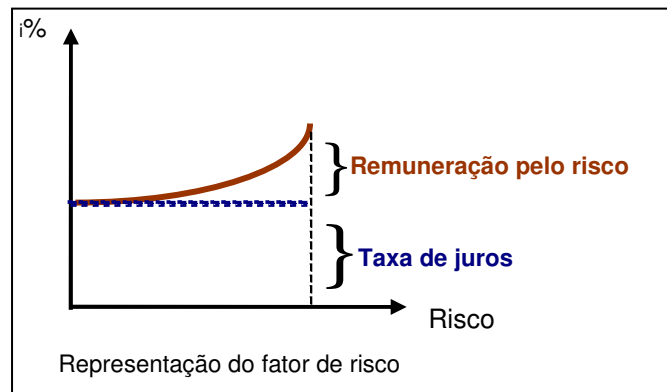
No caso de seqüência de capitais ou série de pagamentos, o “n” expressa o número de pagamentos ou recebimentos efetuados do começo ao fim da operação. Todos nós, obviamente, já nos deparamos com uma situação como comprar um televisor em 5 prestações mensais. Essas 5 prestações representam o "n", ou seja, o número de pagamentos que serão efetuados durante toda a operação.

## 2.5 – Taxa de Risco

O risco é capacidade de se mensurar o estado de incerteza de uma decisão mediante o conhecimento das probabilidades de ocorrência de determinados resultados.

Em situações normais, na taxa de juro está acrescido o fator de risco. Este risco está associado à capacidade de solvência da empresa tomadora, o volume de capital emprestado, a política monetária, etc.

Assim, pode-se afirmar que a taxa de juro propriamente dita é fixa, sendo variável o fator risco, conforme gráfico ao lado.

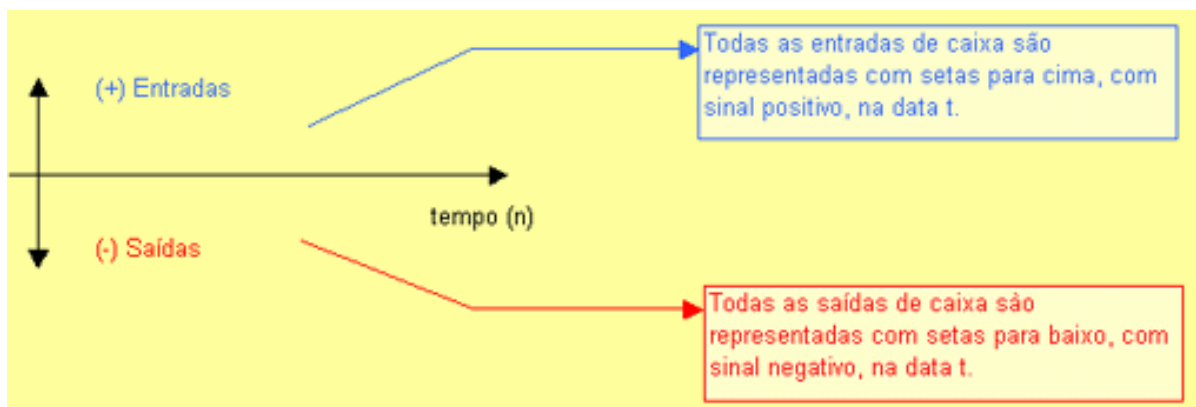


## 2.6 - Diagrama de Fluxo de Caixa

Mais um conceito fundamental da matemática financeira é o de **fluxo de caixa**. Ele é definido como o conjunto de entradas e saídas monetárias (pagamentos e recebimentos) referentes a uma transação financeira de uma empresa, projeto de investimento e etc.

Nesse contexto, o diagrama de fluxo de caixa é a representação gráfica desse indispensável instrumento de análise de rentabilidade, custos, viabilidade econômica e financeira de projetos de investimento. O diagrama torna mais fácil a visualização da movimentação monetária, facilitando o processo de análise.

O diagrama é universal e feito da seguinte forma:



### Vale lembrar que:

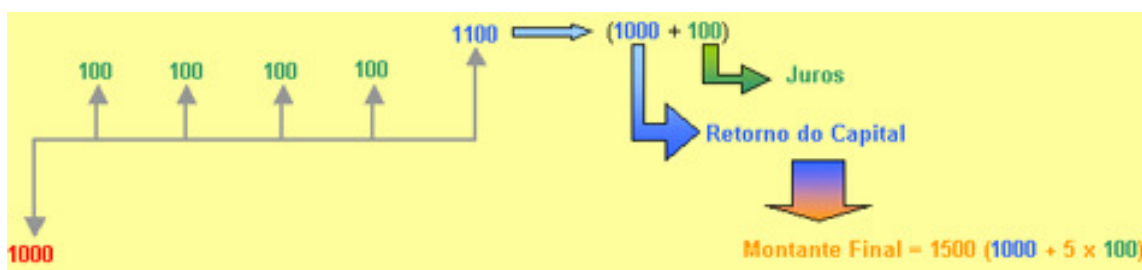
- As setas não são necessariamente proporcionais ao valor das entradas e saídas.
- O fluxo de caixa é muito útil na análise de problemas com séries de capital.
- Os intervalos de tempo entre os períodos são todos iguais.
- Os valores serão colocados no início e final de cada período, dependendo da convenção utilizada, mas nunca durante o período.

### Exemplo:

Para exemplificar o conceito de fluxo de caixa, suponha a seguinte situação:

Um investidor compra um título hoje por R\$ 1.000,00. Esse título lhe dá o direito de receber, durante 5 anos, a quantia de 10 % a.a (ao ano) sobre o valor inicial pago (denominado valor nominal ou de face), mais o capital inicial de volta no final do quinto ano.

O diagrama ficaria assim:



### 3 - JUROS SIMPLES

#### 3.1 - Conceito

Os juros simples caracterizam pelo fato de que, os rendimentos (juros) gerados no decurso de todo o período do empréstimo, têm uma única data de computação, que é a data do vencimento. Assim os Juros Simples são aqueles em que os rendimentos (juros) são agregados ao principal na data de vencimento (ou resgate do empréstimo).

#### 3.2 – Cálculo do Juro Simples (J)

$$J = PV \cdot n \cdot i$$

Nesta fórmula, a taxa e o número de períodos devem referir-se à mesma unidade de tempo; isto é, se a taxa for anual, o tempo deverá ser expresso em número de anos; se a taxa for mensal, o tempo deverá ser expresso em número de meses.

Sendo:

J = Juros Simples ou Rendimentos a serem pagos;

PV = Capital emprestado (principal);

i = Taxa de juros (expressa em razão centesimal  $\frac{i}{100}$ );

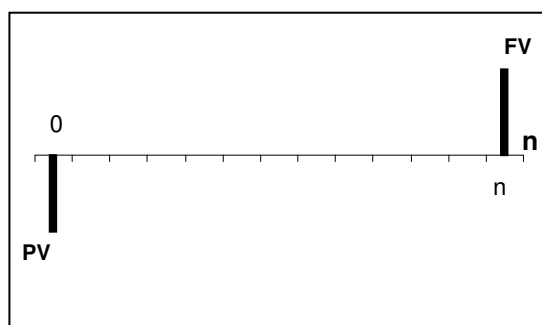
n = Prazo do empréstimo (período).

#### 3.3 – Valor Futuro - Montante - Valor do Resgate

$$FV = PV \cdot (1 + n \cdot i)$$

Portanto:  $F = P + J$

A taxa empregada em todas as fórmulas da matemática financeira é a unitária (razão centesimal), que corresponde à taxa percentual (ou taxa centesimal) dividida por 100.

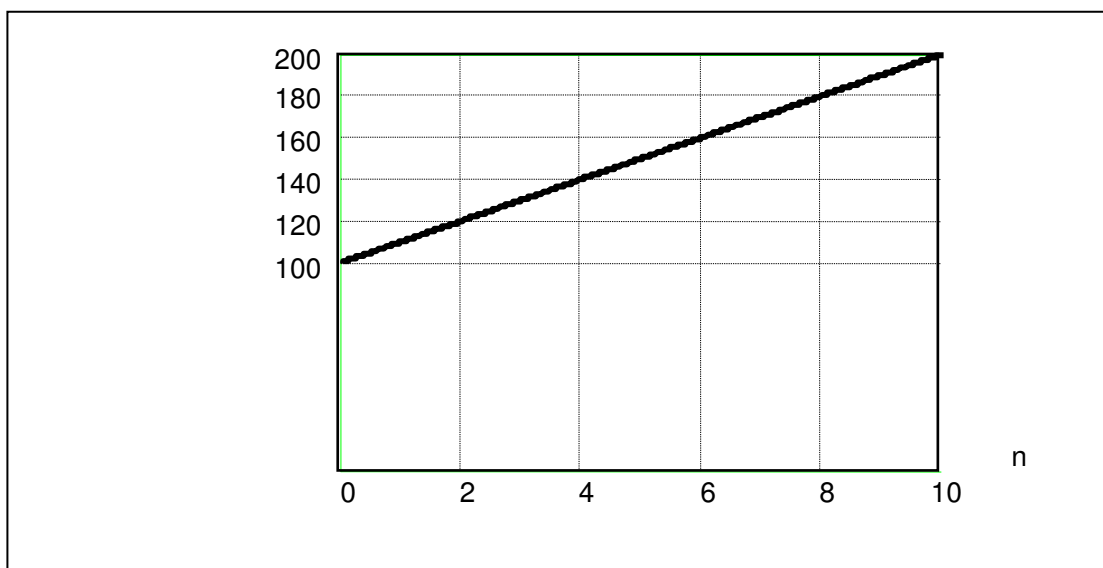


Analisando o gráfico a seguir, conclui-se que o juro simples cresce linearmente e em progressão aritmética.

Sendo o período  $n$  uma variável contínua (juros simples), pode se representar a formula:

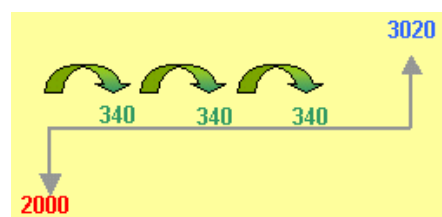
$$\boxed{FV = PV \cdot (1 + n \cdot i)}$$

pela equação do 1º grau  $y = a \cdot x + b$ , tendo o seguinte gráfico:



### Exemplo:

Aplica-se um capital de R\$ 2.000,00 no início do primeiro ano e espera-se resgatá-lo daqui a 3 anos. Sabendo que o regime é de capitalização simples e que os juros são de 17% a.a., é fácil calcular o montante. Veja figura abaixo:



Fazendo o cálculo do juro e montante usando o EXCEL.

Verifique os passos abaixo:

	A	B	C
1	Dados	Valores	Memória de Cálculo
2	Valor Presente (Capital)	R\$ 2.000,00	
3	Taxa de Juros	17%	
4	Juros (ao período)		$J = C \cdot i$
5	Número de Períodos (n)	3	
6	Valor Futuro (Montante)		$M = C + (J \cdot n)$

	A	B	C
1	Dados	Valores	Memória de Cálculo
2	Valor Presente (Capital)	R\$ 2.000,00	
3	Taxa de Juros	17%	
4	Juros (ao período)	= B2 * B3	J = C * i
5	Número de Períodos (n)	3	
6	Valor Futuro (Montante)	= B2 + (B4 * B5)	M = C + (J * n)

Veja a planilha resolvida:

	A	B	C
1	Dados	Valores	Memória de Cálculo
2	Valor Presente (Capital)	R\$ 2.000,00	
3	Taxa de Juros	17%	
4	Juros (ao período)	R\$ 340,00	J = C * i
5	Número de Períodos (n)	3	
6	Valor Futuro (Montante)	R\$ 3.020,00	M = C + (J * n)

Na HP 12C, os cálculos podem ser executados da seguinte forma:

Valores de Entrada	Tecla função	Saída	
2000	ENTER	2000	::> Valor do capital
17	%	340	::> Valor dos juros
3	x	1020	::> Juros multiplicados pelo número de períodos
	+	3020	::> Valor futuro

### 3.4 - Taxas Equivalentes

Em alguns casos temos que transformar a taxa de juros ao mês para uma taxa de juros diária. Esse cálculo é muito usado em transações financeiras em geral e as taxas que procuramos são denominadas taxas equivalentes, isto é, que produzem o mesmo montante se aplicadas sobre um mesmo capital em um mesmo intervalo de tempo.

No caso dos juros simples, o cálculo é muito fácil e simplificado pelo caráter linear desse tipo de capitalização. Pode sempre ser feito por meio da proporcionalidade (usando regra de três simples, por exemplo).

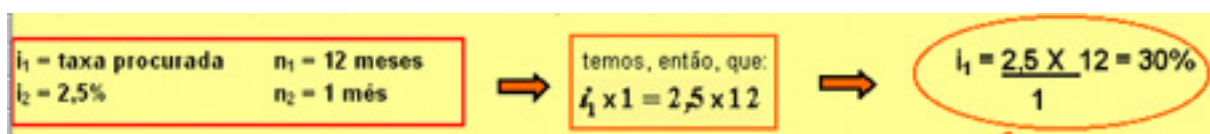
Para efeito demonstrativo, vamos colocar a fórmula que pode ser usada para o cálculo dessas taxas.

Sabendo que ocorrem taxas equivalentes quando:

$$PV \cdot n_1 \cdot i_1 = PV \cdot n_2 \cdot i_2 \Rightarrow i_1 \cdot n_1 = i_2 \cdot n_2$$

Se, particularmente,  $n_1 = 1$ , então:  $i_2 = \frac{i_1}{n_2}$

Se quisermos calcular, por exemplo, a taxa anual em juros simples, equivalente à taxa mensal de 2,5 % a.m., teremos:



Note que esse é um dos poucos casos nos quais não existe a necessidade de se transformar as porcentagens em número decimal, uma vez que tratamos com porcentagens dos dois lados da equação.

Daí tiramos que a taxa equivalente é de 30% ao ano. Veja que isso é exatamente o que fizemos no exemplo dado para transformar a taxa mensal de juros do cartão de crédito, de 10 % a.m., em uma taxa diária de juros de 0,33 % a.d. (10/30).

### 3.5 - Juros Exatos e Juros Comerciais

O cálculo de taxas equivalentes diárias é muito comum no nosso dia-a-dia, como visto anteriormente. Porém, o cálculo das taxas equivalentes tem como pressuposto o cálculo dos dias corridos da operação. Essa conta, por sua vez, pode ser feita de duas maneiras distintas, aplicáveis de acordo com a operação.

Quando usamos como base o ano civil, com 365 dias (ou 366) e meses com números variáveis de dias, os juros calculados são os juros exatos.

Quando usamos como base o ano comercial de 360 dias e meses com 30 dias, os juros obtidos são os juros comerciais.

Exemplo:

Um capital de R\$ 5.000,00 foi aplicado à taxa de 20% a.a. pelo prazo de 53 dias. Verifique os juros comerciais e os juros exatos dessa aplicação.

	<b>A</b>	<b>B</b>
<b>1</b>	Dados	Valores
<b>2</b>	Valor presente (Capital)	R\$ 5.000,00
<b>3</b>	Período	53
<b>4</b>	Taxa de juros	20%
<b>5</b>	Taxa de juros exatos ao dia	0,05479%
<b>6</b>	Taxa de juros comerciais ao dia	0,05556%
<b>7</b>	Juros exatos	R\$ 145,21
<b>8</b>	Juros comerciais	R\$ 147,22

- A taxa de juros exatos por dia é calculada dividindo-se a taxa nominal anual dada por 365.
- A taxa de juros comerciais por dia é calculada dividindo-se a taxa nominal anual por 360.
- Para o cálculo de ambos os juros, simplesmente multiplique cada uma das taxas diárias equivalentes pelo período de aplicação.

**EXERCÍCIOS RESOLVIDOS**

1. Um investidor aplicou R\$ 10.000,00 a uma taxa de juros de 10% ao ano por um prazo de um ano. Qual será o valor do resgate deste investimento?

Solução:

$$\text{Formula: } FV = PV \cdot (1 + n \cdot i)$$

$$FV = 10.000,00 \cdot (1 + 1 \cdot 0,10) \rightarrow FV = 10.000,00 \cdot 1,10 \rightarrow FV = 11.000,00$$

2. Expressar as taxa de juros percentuais, na forma de razão centesimal:

$$\text{a) } 1\% = \frac{1}{100} = 0,01$$

$$\text{b) } 6,5\% = \frac{6,5}{100} = 0,065$$

3. Uma pessoa faz um empréstimo de R\$ 1.000,00 a juros simples de 10% ao ano por um prazo de 3 anos. Qual será o valor resgate deste empréstimo?

Solução:

$$\text{Formula: } FV = PV \cdot (1 + n \cdot i)$$

$$F = 1.000,00 \cdot (1 + 0,10 \cdot 3) \rightarrow F = 1.000,00 \cdot 1,30 \rightarrow F = 1.300,00$$

4. Determinar os juros de um capital R\$ 800,00, a 12% a.a., durante 7 meses.

Solução:

$$\text{Formula: } J = PV \cdot n \cdot i$$

$$J = 800,00 \cdot 7 \cdot 0,12 \rightarrow J = 56$$

5. Qual o montante de um capital de R\$ 600,00, aplicado por 8 meses, a 18% aa.

Solução:

$$\text{Formula: } FV = PV \cdot (1 + n \cdot i)$$

$$i = 18\% \text{ a.a.} = 18/12 = 1,5\% \text{ a.m.}$$

$$FV = 600,00 \cdot (1 + 8 \cdot 0,015) \rightarrow FV = 600,00 \cdot 1,12 \rightarrow FV = 672,00$$

## 4 - DESCONTOS SIMPLES

### 4.1 - Definição

Quando um título de crédito é resgatado antes de seu vencimento, ele sofre um abatimento, que é denominado desconto.

Um título possui um valor, chamado **Nominal (N)**, a ele declarado, que corresponde ao seu valor no dia do vencimento. Antes disso, o título pode ser resgatado por um valor menor que o nominal, sendo denominado **Valor Atual (VA)** ou **Valor Presente**.

Existem duas metodologias para o cálculo dos descontos: o Desconto Racional Simples ou "Por Dentro" e o Desconto Comercial Simples ou "Por Fora".

Chama-se desconto simples o calculado sobre um único valor do título (nominal ou atual). Se for calculado sobre o valor nominal, é chamado desconto comercial ou "por fora" e, se for calculado sobre o valor atual é chamado desconto racional ou "por dentro".

**Valor Atual (Valor de Face):** é o valor presente de uma operação, um título, uma transação financeira, uma dívida, ou ainda o valor do título na data de pagamento.

Na outra ponta de todos esses casos está o **Valor Nominal**, que geralmente é empregado para valores de títulos na data de seu vencimento, mas também pode ser estendido para todos esses outros casos citados. O valor nominal é o valor final da operação, que, se tirados os juros incorridos ou embutidos, torna-se igual ao valor presente.

### 4.2 – Desconto Comercial ou Por Fora

Desconto Comercial ou por Fora é a modalidade de desconto freqüentemente usada no mercado. No Desconto Comercial há uma taxa antecipada, denominada **taxa de desconto**, que incide sobre o Valor Nominal de um título ou transação trazendo-o ao Valor Presente (Valor Atual) na data antecipada. Esse método difere-se do Desconto Racional, pois, nesse último, utilizávamos a própria taxa de juros para calcular o Valor Presente.

Nesse caso, o Valor Presente é o "montante" procurado, pela incidência de uma taxa de desconto, por tantos períodos quanto forem especificados, sobre um Valor Base, nesse caso, o Valor Nominal. Trata-se, literalmente, da operação inversa à da capitalização

do Capital Inicial. Essa é uma operação de descapitalização.

Denominando  $N$  o valor nominal do título e  $D_c$  o desconto comercial, temos:

$$D_c = N \cdot n \cdot d_c$$

O Valor Atual (VA) é igual ao valor nominal menos o desconto, assim:

$$VA = N - D_c$$

Sendo assim:  $VA = N \cdot (1 - n \cdot d_c)$

### 4.3 - Desconto Racional ou Por Dentro

O desconto racional ou por dentro equivale ao juro simples calculado sobre o Valor Atual do título. Denominamos o desconto racional ( $D_R$ ), temos:

$$D_R = VA \cdot n \cdot d_R$$

A taxa utilizada é a taxa de desconto racional ( $d_R$ ) que é igual à taxa de juro simples (i). Esse tipo de desconto raramente tem sido utilizado pelo mercado brasileiro.

O Valor Atual (VA) é igual ao valor nominal menos o desconto, assim:

$$VA = N - D_R$$

Sendo assim:  $VA = \frac{N}{(1 + n \cdot d_R)}$  ou  $N = VA \cdot (1 + n \cdot d_R)$  ou  $D_R = \frac{N \cdot n \cdot d_R}{1 + n \cdot d_R}$

Exemplo:

Um título, com Valor Nominal de R\$ 7.000,00, foi descontado três meses antes do seu vencimento. Se a taxa de juros do mercado é de 7 % a.m., qual o valor do desconto e o valor recebido antecipadamente por tal título?

Veja que simplesmente aplicando as fórmulas é possível resolver esse exercício.

$$\begin{aligned} N &= 7.000,00 \\ i &= 7\% \\ n &= 3 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow V = 7000 / (1 + 0,07 * 3)$$

$$\Rightarrow V = 5.785,12$$

Forma decimal para taxa de juros (7/100)

No EXCEL, os cálculos podem ser feitos, simplificada mente, da seguinte forma:

	A	B	C
1	Dados	Valores	Memória de Cálculo
2	Valor nominal	R\$ 7.000,00	
3	Taxa de juros	7 %	
4	Período antecipado	3	
5	Valor atual	R\$ 5.785,12	$V = N / 1 + i*n$
6	Desconto	R\$ 1.214,88	$DR = N - V$

Verifique as fórmulas:

$$B5 = B2 / (1 + (B3 * B4))$$

$$B6 = B2 - B5$$

Repare que, no desconto racional, o desconto em si é calculado pela incidência da taxa sobre o Valor Atual ou Presente de um capital, até a data de antecipação do título ou transação, e o desconto é obtido pela diferença entre o Valor Nominal e o Valor Atual "ajustado" encontrado.

Para uma melhor visualização desse argumento lembre que a fórmula usada para o cálculo do Valor Atual veio de:

$$V + V.i.n = N$$

A taxa de juros incide sobre o Valor Atual, corrigindo-o até a referida data.

Na **HP 12C**, esse exercício pode ser resolvido da seguinte forma:

Entrada	Tecla função	Saída
7000	ENTER	7000
0,07	ENTER	0,07
3	(multiplica)	0,21
1	+	1,21
	(divide)	5785,12

Para compreendermos melhor, vamos fazer o mesmo exercício do exemplo anterior, pelo Desconto Comercial.

Dessa vez, porém, a taxa de desconto é que será igual a 7% a.m.

Substituindo nas fórmulas, temos que:

$$\left\{ \begin{array}{lll} \mathbf{N} = \text{R\$ } 7.000,00 & \mathbf{D_c} = 7000 * 0,07 * 3 & \mathbf{::> D_c} = \text{R\$ } 1.470,00 \\ \mathbf{d} = 7 \% \text{ a.m.} & & \\ \mathbf{n} = 3 \text{ meses} & \mathbf{VA_c} = 7000 - 1470 & \mathbf{::> VA_c} = \text{R\$ } 5.530,00 \end{array} \right.$$

A diferença dos dois métodos é clara agora.

No primeiro exemplo, o que incidu sobre o Valor Nominal foi a taxa de juros. Já no segundo caso, foi a taxa de desconto. Note que essas taxas incidem de maneiras diferentes.

Por isso que a taxa de juros e a taxa de desconto, apesar de iguais em valor no exemplo acima, não são equivalentes.

Verifique no EXCEL como isso fica ainda mais claro e fácil de resolver:

	A	B	C
1	Dados	Valores	Memória
2	Valor nominal	R\$ 7.000,00	
3	Taxa de desconto	7 %	
4	Período antecipado	3	
5	Desconto comercial	R\$ 1.470,00	DC = N * d * n
6	Valor atual	R\$ 5.530,00	VC = N - DC

Visualize as fórmulas.

B5            =B2\*B3\*B4

B6            =B2-B5

Repare que o Desconto Comercial é maior que o Desconto Racional.

**Isso também acontece em virtude da diferença de base de incidência de cada uma das taxas.**

Os cálculos de Descontos Comerciais também podem ser realizados na HP 12C. Veja como fazê-los:

Entrada	Tecla função	Saída
7000	ENTER	7000
0,07	(multiplica)	490
3	(multiplica)	1470
7000	(subtrai)	-5530
	CHS	5530

Neste exemplo testamos a equivalência das duas taxas utilizadas em cada um dos métodos.

Se, por exemplo, pegássemos o Valor Recebido pela antecipação do exercício anterior. Será que, se reinvestíssemos esse dinheiro a uma taxa de juros de 7 % a.m., conseguiríamos de novo os R\$ 7.000,00 que iríamos receber?

Isso é muito fácil de verificar com a ajuda do EXCEL. Vamos verificar essa aplicação dos R\$ 5.530,00 por três meses e ver o resultado.

	A	B	C
1	<b>Dados</b>	<b>Valores</b>	<b>Memória de Cálculo</b>
2	Valor presente	R\$ 5.530,00	
3	Taxa de juros	7 %	
4	Período de aplicação	3	
5	Juros	R\$ 1.161,30	$J = C * i * n$
6	Valor final	R\$ 6.691,30	$M = C + J$

Visualize as fórmulas.

B5 =B2\*B3\*B4

B6 =B2+B5

Veja que mesmo reapplicando a uma taxa de juros igual à de desconto, sob a qual o Valor Nominal foi descontado, não conseguimos reaver os R\$ 7.000,00. Isso reitera ainda mais a posição da não equivalência das taxas.

Na HP 12C o cálculo seria desta forma. Veja como fazê-lo.

Entrada	Tecla função	Saída
5530	ENTER	5530,00
7	%	387,10
3	x	1161,30
	+	<b>6691,30</b>

#### 4.4 – Comparação entre o Desconto Comercial e o Desconto Racional

Uma simples comparação das duas fórmulas permite verificar que o desconto comercial é sempre maior que o desconto racional, pois este é obtido dividindo-se o desconto comercial pela expressão  $1 + i \cdot n$ . Assim:

$$\boxed{D_C = N \cdot n \cdot d_c} \text{ e } \boxed{D_R = \frac{N \cdot n \cdot d_R}{1 + n \cdot d_R}} \rightarrow \boxed{D_C - D_R = D_R \cdot i \cdot n} \rightarrow \boxed{d_c = \frac{d_R}{1 + d_R \cdot n}}$$

E como faríamos se quiséssemos reaplicar o dinheiro recebido na antecipação e resgatar R\$ 7.000,00 daqui a três meses? Esse procedimento, de achar taxas equivalentes, pode ser feito de **2 formas**:

a) A **primeira** delas é pela aplicação das fórmulas de equivalência entre a taxa de juros e a taxa de desconto.

Calculando manualmente, ou inserindo as fórmulas no EXCEL, você acha taxas equivalentes.

As fórmulas são as seguintes:

$$\boxed{d_R = \frac{d_c}{1 - d_c \cdot n}} \text{ ou } \boxed{d_c = \frac{d_R}{1 + d_R \cdot n}}$$

Desta forma, sabendo que foi usada uma taxa de desconto de 7 % para o desconto do título, e que o Valor recebido pela liquidação foi de R\$ 5.530,00, podemos facilmente agora achar a taxa correspondente e verificar a eficácia do método.

Vamos utilizar a planilha do EXCEL para facilitar as contas.

	A	B	C
<b>1</b>	<b>Dados</b>	<b>Valores</b>	<b>Memória de Cálculo</b>
<b>2</b>	Valor presente	R\$ 5.530,00	
<b>3</b>	Taxa de desconto comercial	7,00 %	
<b>4</b>	<b>Taxa de juros equivalentes</b>	8,86 %	$i = d / 1 - d \cdot n$
<b>5</b>	Período de aplicação.	3	
<b>6</b>	Juros	R\$ 1.470,00	$J = C \cdot i \cdot n$
<b>7</b>	<b>Valor final</b>	<b>R\$ 7.000,00</b>	$M = C + J$

Visualize as fórmulas corretas.

B4            =B3/(1-B3\*B5)

B6            =B2\*B4\*B5

B7            =B2+B6

Na HP 12C o cálculo seria desta forma. Veja como fazê-lo.

Entrada	Tecla função	Saída
0,07	ENTER	0,07
3	x	0,21
	CHS	-0,21
1	+	0,79
0,07	X $\begin{smallmatrix} \triangleright \\ \triangleleft \end{smallmatrix}$ Y	0,0886
3	x	0,27
5530	x	1470,00
5530	+	<b>7000,00</b>

b) A **segunda** forma, mais fácil e rápida, é utilizar a função **Atingir Meta**. Com essa função pode-se estimar o valor de uma variável fixando o valor de outra variável como objetivo. Nesse caso, você procura uma taxa de juros que retornaria os R\$ 7.000,00 em três meses, aplicando o Capital que recebeu como pagamento pelo desconto do título.

Esse recurso, o Atingir Meta, é muito útil na resolução de problemas mais complexos de matemática financeira, e permite que você veja instantaneamente qual o impacto de uma mudança na célula variável, neste caso, a taxa de juros.

Isso pode ser muito útil na resolução de problemas de matemática financeira mais complexos.

Agora você verá como é fácil usá-lo.

Veja o exercício abaixo que utiliza a função Atingir Meta, como indicado na caixa abaixo da tabela.

Confira no EXCEL como foi realizado o cálculo com uma taxa de 8,86 % a.m. que você necessitaria para atingir o seu objetivo de R\$ 7.000,00.

	A	B	C
1	<b>Dados</b>	<b>Valores</b>	<b>Memória de Cálculo</b>
2	Valor presente		
3	Taxa de juros		
4	Período de aplicação		
5	Juros		$J = C * i * n$
6	Valor final	<b>R\$ 7.000,00</b>	$M = C + J$

Exemplo resolvido:

	A	B	C
1	<b>Dados</b>	<b>Valores</b>	
2	Valor presente	R\$ 5.530,00	
3	Taxa de juros	8,86%	
4	Periodo de aplicação	3	
5	Juros	R\$ 1.470,00	
6	Valor final	R\$ 7.000,00	
7			

**Atingir meta**

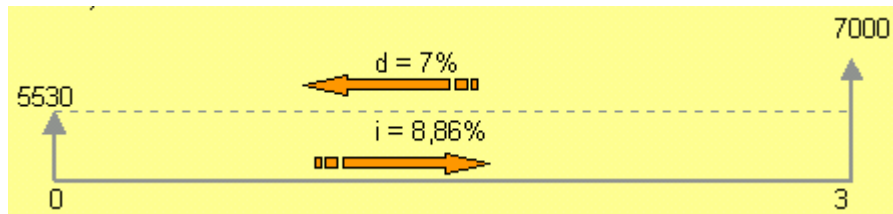
Definir célula:

Para valor:

Alternando célula:

OK Cancelar

Desta forma, qualquer que fosse o método utilizado para o cálculo da taxa de juros simples da operação, sua visualização seria a seguinte:



As operações de desconto de um conjunto de títulos são idênticas às operações de desconto de um título só. No caso de um conjunto de duplicatas (chamado borderô) a serem descontadas, o seu valor líquido recebido pela antecipação do resgate é simplesmente a soma dos valores líquidos de todas as duplicatas que compõe o borderô.

Vejamos como é simples por de uma **Operação com títulos**

Suponhamos o seguinte borderô ilustrativo de uma empresa, a ser descontado nas datas indicadas. O seu valor líquido será:

**Dica :** Como estamos tratando de prazos em dias, a fórmula utilizada deve ser a diária!!!

	A	B	C	D	E
1	<b>Dados</b>	<b>Taxa</b>			
2	Taxa desconto mensal	8 %			
3	<b>Taxa desconto diária</b>	0,27 %			
4	<b>Duplicata</b>	<b>Vencimento</b>	<b>Valor nominal</b>	<b>Desconto</b>	<b>Valor líquido</b>
5	X	30	R\$ 15.000,00	R\$ 1.200	R\$ 13.800,00
6	Y	60	R\$ 22.000,00	R\$ 3.520	R\$ 18.480,00
7	Z	90	R\$ 35.000,00	R\$ 8.400	R\$ 26.600,00
8	<b>Valor líquido total</b>				R\$ 58.880,00

Não se esqueça que:

$$D = N * d * n$$

Visualize as fórmulas.

D5	=C5*B38*B5	E5	=C5-D5
D6	=C6*B38*B6	E6	=C6-D6
D7	=C7*B38*B7	E7	=C7-D7
		E8	=SOMA(E5:E7)

Na HP 12C o cálculo seria desta forma:

Entrada	Tecla função	Saída	
	f FIN		::> Limpa toda a memória financeira da calculadora
	f CLX	0	::> Limpa toda a memória financeira da calculadora
8	ENTER	8,00	::> Input da taxa mensal de desconto de 8%
30	÷	0,266667	::> Transforma a taxa mensal em taxa diária
	STO 0 (zero)	0,266667	::> Armazena a taxa diária na memória 0 (zero)
15000	ENTER	15.000,00	::> Inicia o cálculo do desconto de um dia da Duplicata "X"
	RCL 0 (zero)	0,266667	::> Chama da memória 0 (zero) a taxa do desconto diária
	%	40,00	::> Calcula o valor do desconto de um dia da Duplicata "X"
30	X	<b>1.200,00</b>	::> Calcula o valor do desconto para 30 dias
	-	<b>13.800,00</b>	::> Calcula o valor líquido da Duplicata "X"
22000	ENTER	22.000,00	::> Inicia o cálculo do desconto de um dia da Duplicata "Y"
	RCL 0 (zero)	0,266667	::> Chama da memória 0 (zero) a taxa do desconto diária
	%	58,67	::> Calcula o valor do desconto de um dia da Duplicata "Y"
60	x	<b>3.520,00</b>	::> Calcula o valor do desconto para 60 dias
	-	<b>18.480,00</b>	::> Calcula o valor líquido da Duplicata "Y"
35000	ENTER	35.000,00	::> Inicia o cálculo do desconto de um dia da Duplicata "Z"
	RCL 0 (zero)	0,266667	::> Chama da memória 0 (zero) a taxa do desconto diária
	%	93,33	::> Calcula o valor do desconto de um dia da Duplicata "Z"
90	x	<b>8.400,00</b>	::> Calcula o valor do desconto para 90 dias
	-	<b>26.600,00</b>	::> Calcula o valor líquido da Duplicata "Z"
18480	+	45.080,00	::> Inicia o cálculo da soma do valor líquido total das duplicatas
13800	+	<b>58.880,00</b>	::> Valor líquido total das duplicatas

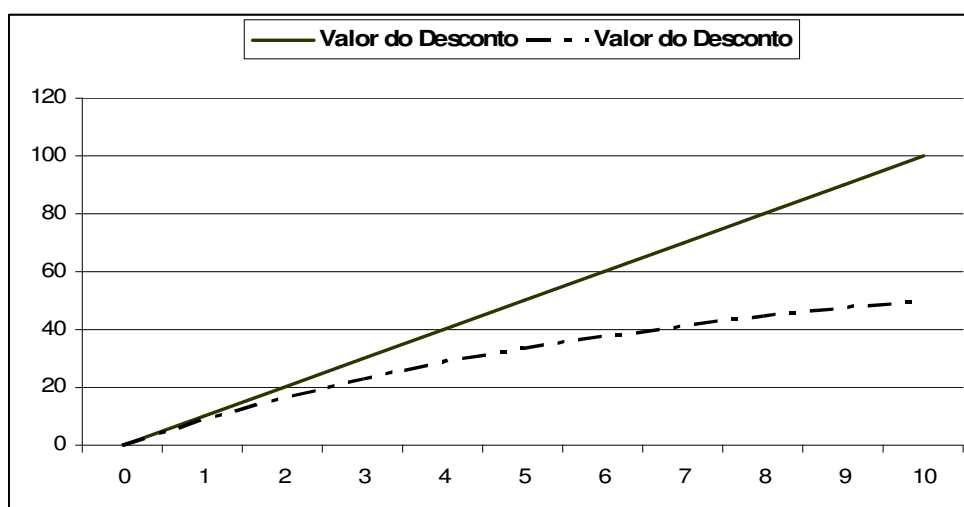
Atualmente, na prática, apenas o desconto comercial é utilizado. Entretanto, seu emprego é para operações a curto prazo; para prazos longos, seu cálculo se torna

impraticável, pois o valor do desconto se torna tão elevado que pode, inclusive, ultrapassar o próprio valor nominal do título.

A tabela seguinte mostra a diferença entre o desconto comercial e racional, para uma taxa de 10% ao período, por 10 períodos.

Data focal	0				
Taxa de desconto	10,00% ao período				
Regime simples		Desconto Comercial		Desconto Racional	
Período (n)	Fluxo de caixa nominal	Fluxo na data focal	Valor do Desconto	Fluxo na data focal	Valor do Desconto
0	100,00	100,00	0	100,00	0
1	100,00	90,00	10,00	90,91	9,09
2	100,00	80,00	20,00	83,33	16,67
3	100,00	70,00	30,00	76,92	23,08
4	100,00	60,00	40,00	71,43	28,57
5	100,00	50,00	50,00	66,67	33,33
6	100,00	40,00	60,00	62,50	37,5
7	100,00	30,00	70,00	58,82	41,18
8	100,00	20,00	80,00	55,56	44,44
9	100,00	10,00	90,00	52,63	47,37
<b>10</b>	<b>100,00</b>	<b>-</b>	<b>100,00</b>	<b>50,00</b>	<b>50,00</b>

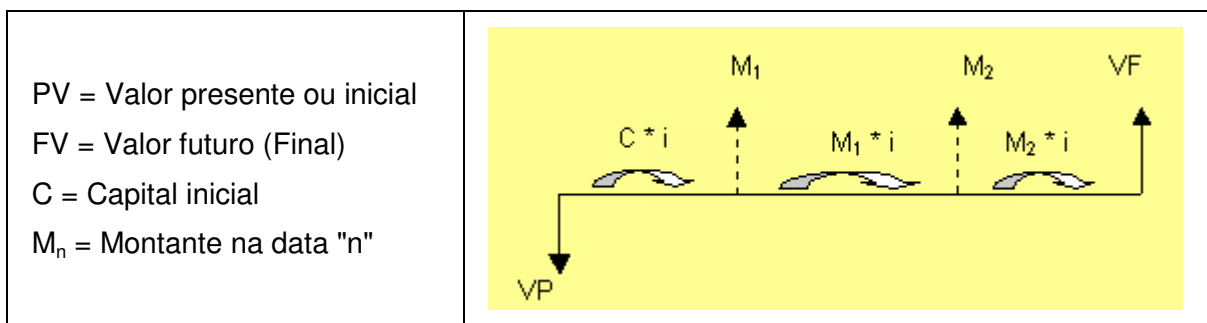
O gráfico abaixo mostra uma comparação entre os descontos comercial e o racional em função do tempo de vencimento de um título. Pode-se verificar que o número de períodos necessários para o vencimento do título for igual a  $1/i$ , o valor do desconto comercial é igual ao valor nominal do título, enquanto o desconto racional é exatamente a metade do valor nominal.



## 5 - JUROS COMPOSTOS

### 5.1 Conceito

Os juros compostos têm seu fundamento no regime de capitalização composta, vista no primeiro módulo, no qual o crescimento do capital se dá exponencialmente (por isso, o cálculo dos juros compostos também é chamado de cálculo exponencial). Trata-se de juros compostos toda transação na qual os juros incidem sempre sobre o capital inicial e os juros acumulados até a referida data são, então, diferentes em todos os períodos. Lembre-se do diagrama para o regime de juros compostos:



Juros compostos, acumulados ou capitalizados, são os que, no fim de cada período, são somados ao capital constituído no início, para produzirem novos juros no período seguinte.

### 5.2 – Cálculo do Montante – Valor Faturado (FV)

Vamos supor que alguém toma um empréstimo de PV Reais, para ser pago ao final de um ano, a uma taxa de juros anual  $i\%$ .

Portanto:  $FV = PV + J$  onde  $J = PV \cdot i$ , ou melhor:  $FV = PV \cdot (1 + i)$

Supondo que esta pessoa que tomou o empréstimo, combinou com o Banco um prazo (período) de dois 2 anos, onde os juros devidos, que vencerão no final do primeiro ano serão financiados para serem pagos no vencimento do empréstimo.

Para tanto:

a) Banco empresta PV reais, a uma taxa anual de  $i\%$  por dois anos;

b) Ao fim do primeiro ano deveriam ser pagos  $PV \cdot i$  de juros. Mas este montante seja financiado até o fim do segundo ano;

c) No fim do segundo ano, deverá ser pagos o total emprestado acrescidos de juros a uma taxa de  $i\%$  ao ano.

O Total emprestado é de  $PV + PV \cdot i$  e o montante de juros é de  $i \cdot (PV + PV \cdot i)$

Assim:  $FV = PV + PV \cdot i + (PV + PV \cdot i) \cdot i$  simplificando tem-se:  $FV = PV \cdot (1 + i)^2$

Assim sendo, os Juros Compostos diferenciam-se dos Juros Simples pelo fato de, ao final de cada período, ser incorporado ao capital (principal).

O Montante (valor futuro) pode ser calculado através da seguinte formula:

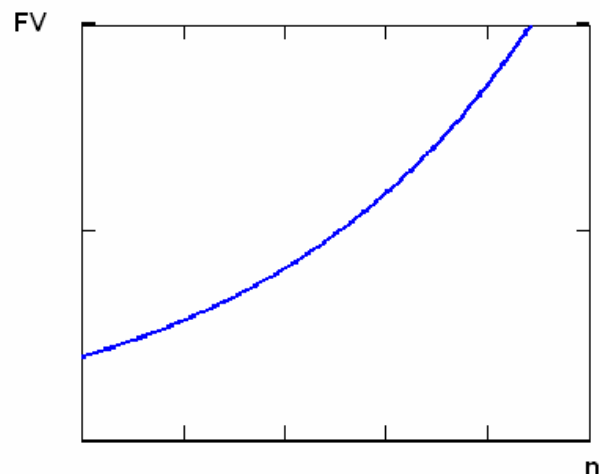
$$FV = PV \cdot (1 + i)^n$$

Onde: FV = Montante (valor futuro)  
 PV = Capital (principal)  
 i = taxa de juros efetiva (fração centesimal)  
 n = período

Essa fórmula só é válida para operações com taxas de juros constantes durante todo o período de aplicação e pagamento único, é a **mais importante para a matemática financeira**, já que dela derivam as fórmulas de **Valor Presente, Valor Futuro, Taxa de Juros e Prazo**, que serão todas vistas adiante. A seguir, veremos, em um exemplo, como fazemos o cálculo do montante.

Se o período "n" for analisado como uma variável contínua, a equação  $FV = PV \cdot (1 + i)^n$  é uma função do tipo  $y = a \cdot b^x$ , cujo gráfico é uma exponencial de ponto inicial  $x = n = 0$  e  $y = PV = a$ , conforme a figura a seguir:

Analisando o gráfico ao lado, pode-se afirmar que os juros compostos crescem exponencialmente e em progressão geométrica ao longo do tempo



Por motivo de comparação, pegaremos o primeiro exemplo do módulo de juros simples. Suponhamos que você tenha uma aplicação de R\$ 120.000,00, que rende, a **juros compostos**, 15% a.t. Quanto esperaria ter no final do ano, se aplicou seu dinheiro no primeiro dia do ano?

No **EXCEL**, o cálculo, sem usar nenhum assistente de função, seria:

	A	B	C
1	Dados	<b>Valores</b>	<b>Memória de Cálculo</b>
2	Valor presente ( C )	R\$120.000,00	
3	Taxa de juros (a.t.)	15%	
4	Período aplicado	4,00	1 ano = 4 trimestres
5	Valor futuro (VF)	R\$209.880,75	$M = C * (1 + i)^n$

Veja a fórmula no Excel:  $B5 = B2 * ((1+B3)^{B4})$

As calculadoras financeiras geralmente usadas, enfatizando aqui a HP 12C, fazem os cálculos de qualquer uma das quatro variáveis presentes na fórmula do montante. Apesar de ainda não termos falado sobre as outras fórmulas, é importante saber que o cálculo pode ser feito apenas inserindo, na calculadora, três das quatro variáveis dessa fórmula.

**IMPORTANTE:** é sempre necessário respeitar a convenção de fluxo de caixa presente nas calculadoras financeiras, onde o **PV** e **FV** devem ser inseridos com **sinais opostos**, indicando as saídas e entradas de caixa. Lembre-se disso sempre!

Assim, o cálculo do valor futuro, ou montante, dessa operação é feito da seguinte forma:

Entrada	Tecla função	Saída	
120.000	<b>CHS PV</b>	-120.000	::> <b>PV</b> – do inglês "Present Value" ou Valor Presente
15	<b>i</b>	15	
4	<b>n</b>	4	
	<b>FV</b>	<b>209.880,75</b>	::> <b>FV</b> – do inglês "Future Value" ou Valor Futuro

**Exemplo:** Um empréstimo deve ser pago em 60 dias. O valor a ser pago é de R\$ 15.000,00. Os juros (compostos) do empréstimo são de 12% a.m. Qual o valor desse empréstimo se ele fosse pago hoje?

$$PV = \frac{M_n}{(1 + i)^n} \Rightarrow PV = 11.957,91$$

Diagrama de anotações para a fórmula acima:

- Uma seta vermelha aponta de  $M_n$  para 15.000,00.
- Uma seta vermelha aponta de  $i$  para 12%.
- Uma seta vermelha aponta de  $n$  para 2.
- Uma seta verde aponta da fórmula completa para o resultado  $PV = 11.957,91$ .

No **EXCEL**, o cálculo, sem usar nenhum assistente de função, seria:

	A	B	C
1	<b>Dados</b>	<b>Valores</b>	<b>Memória de Cálculo</b>
2	Valor Futuro (VF)	15.000,00	
3	Taxa de Juros (a.m.)	12%	
4	Período Aplicado	2,00	60 dias = 2 meses
5	Valor Presente (VP)	11.957,91	$C = M / (1 + i)^n$

Veja a fórmula:  $B5 = B2 / (1 + B3)^{B4}$

Na **HP 12C**, o cálculo é feito assim:

Entrada	Tecla função	Saída	
15000	<b>FV</b>	15.000,00	
12	<b>i</b>	12	::> FV - Valor Futuro ( Montante Final)
2	<b>n</b>	2	
	<b>PV</b>	-11.957,91	::> PV - Valor Presente (Capital Inicial)

**Exemplo:** Qual a taxa de juros compostos que está embutida em um produto que tem preço à vista de R\$ 1.500,00 e a prazo, para pagamento daqui a 90 dias, de R\$ 1.900,00?

No **EXCEL**, o cálculo, sem usar nenhum assistente de função, seria:

	A	B	C
1	<b>Dados</b>	<b>Valores</b>	<b>Memória de cálculo</b>
2	Valor Futuro (VF)	R\$1.900,00	
3	Valor Presente (VP)	R\$1.500,00	
4	Período Aplicado	3,00	em meses
5	Taxa de Juros ( i )	8,20%	$i = ((M/C)^{(1/n)}) - 1$

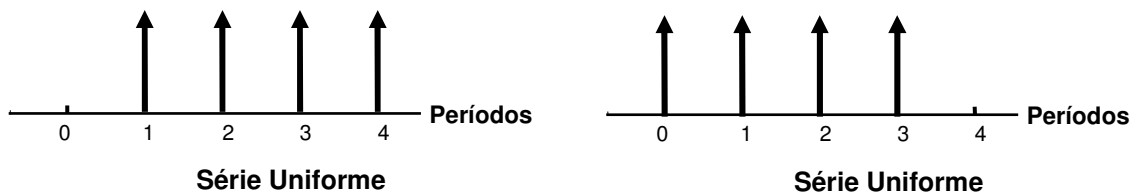
Vejam agora a fórmula:  $B5 = ((B2/B3)^{(1/B4)}) - 1$

Na **HP 12C**, o cálculo é feito assim:

Entrada	Tecla função	Saída
1.900	<b>FV</b>	1.900,00
1.500	<b>CHS PV</b>	-1.500,00
3	<b>n</b>	3
	<b>i</b>	<b>8,20</b>

### 5.3 – Séries Uniformes – (PMT)

Uma série uniforme é um fluxo de caixa que se caracteriza pelo fato de apresentar uma série de desembolsos ou recebimentos iguais ao final de cada período (*postecipada*) ou no início de cada período (*antecipada*). Cada um destes desembolsos ou recebimentos é denotado de PMT.



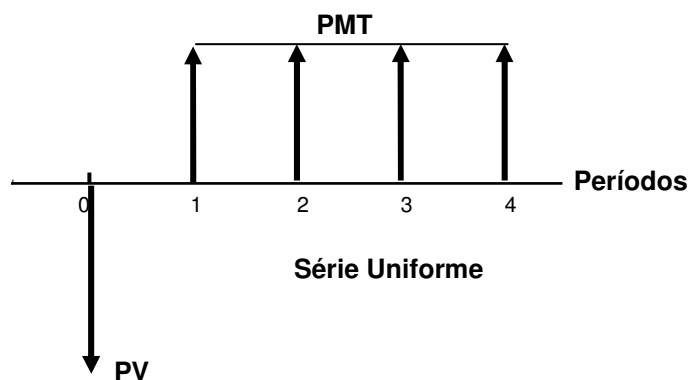
Este tipo de fluxo de caixa ocorre com bastante freqüência na indústria e no comércio. Como algumas séries irregulares podem ser razoavelmente aproximadas por uma série uniforme, muitas vezes é necessário obter, a partir do valor da série, valores presentes e/ou futuro equivalentes e, também, converter valores presentes e/ou futuros em séries uniformes equivalentes.

#### 5.3.1 – Séries Postecipadas

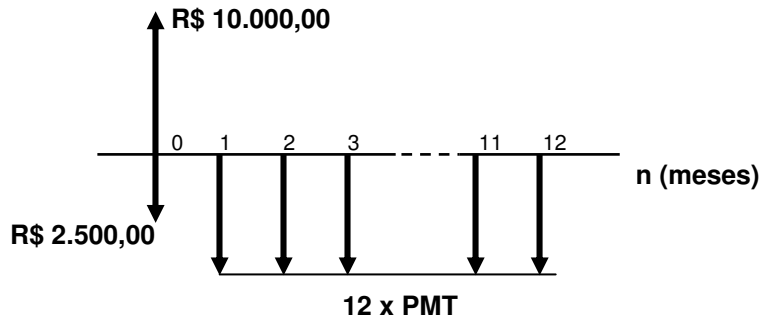
- **Determinação do Valor Presente (PV) em Função da Anuidade (PMT)**

Para determinar o valor presente (PV) equivalente a uma série uniforme (PMT), pode-se utilizar a seguinte fórmula:

$$PV = PMT \cdot \left( \frac{1 - (1+i)^{-n}}{i} \right) \quad \text{ou} \quad PMT = PV \cdot \left( \frac{i}{1 - (1+i)^{-n}} \right)$$



**Exemplo 01:** Um equipamento cujo valor à vista é de R\$10.000,00 será financiado em 12 prestações mensais e sucessivas, além de uma entrada de R\$2.500,00, por ocasião da compra. Determinar o valor das 12 prestações mensais sabendo-se que o financiamento será realizado a juros compostos de 15% ao ano, capitalizados mensalmente, e que a 1ª prestação vencerá 30 dias após a data da compra.



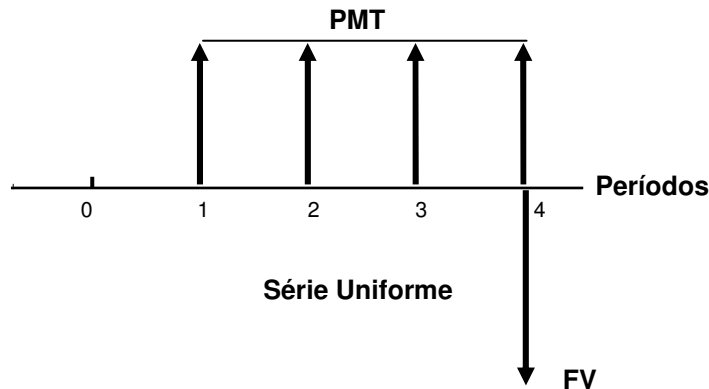
Na **HP 12C**, o cálculo é feito assim:

Entrada	Tecla função	Saída	Comentários
7.500	<b>PV</b>	7.500	Valor financiado = 10.000 – 2.500
12	<b>n</b>	12	Número de parcelas
1,25	<b>i</b>	1,25	Taxa efetiva de juro = $\frac{15}{12}$
	<b>PMT</b>	- 676,94	Valor de cada parcela

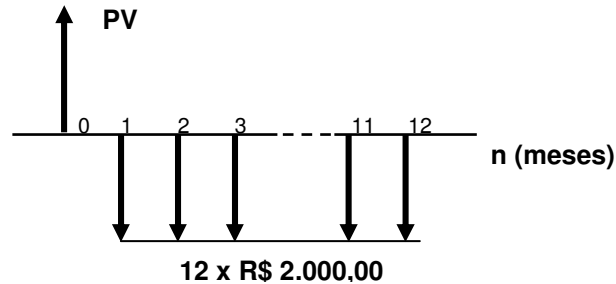
• **Determinação do Valor Futuro (FV) em Função da Anuidade (PMT)**

Para determinar o valor futuro (FV) equivalente a uma série uniforme (PMT), pode-se utilizar a seguinte fórmula:

$$FV = PMT \cdot \left( \frac{(1+i)^n - 1}{i} \right) \quad \text{ou} \quad PMT = FV \cdot \left( \frac{i}{(1+i)^n - 1} \right)$$

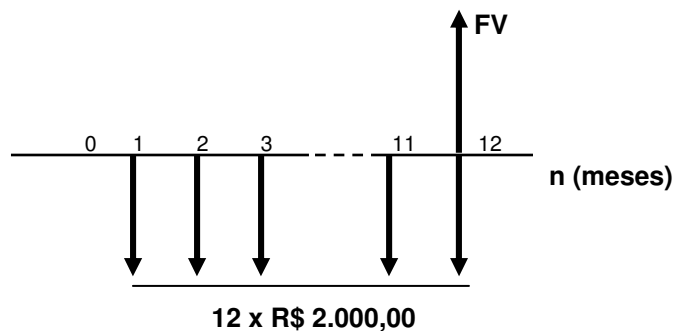


**Exemplo 02:** Um equipamento foi financiado em 12 prestações de R\$ 2.000,00, mensais e sucessivas. Determinar o valor do equipamento a vista e o valor equivalente ao final de 12 meses, sabendo-se que o financiamento será realizado a juros compostos de 12% ao ano, e que a 1ª prestação vencerá 30 dias após a data da compra.



Na **HP 12C**, o cálculo é feito assim:

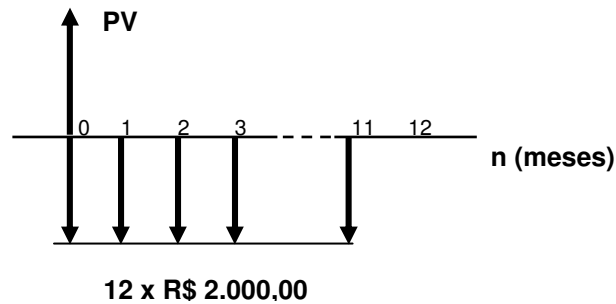
Entrada	Tecla função	Saída	Comentários
2.000	<b>CHS PMT</b>	- 2.000	Valor das parcelas
12	<b>n</b>	12	Número de parcelas
0,949	<b>i</b>	0,949	Taxa efetiva = $\left( (1 + 0,12)^{\frac{1}{12}} - 1 \right) \cdot 100 = 0,949$
	<b>PV</b>	<b>22.582,86</b>	<b>Valor a Vista da Máquina</b>



Na **HP 12C**, o cálculo é feito assim:

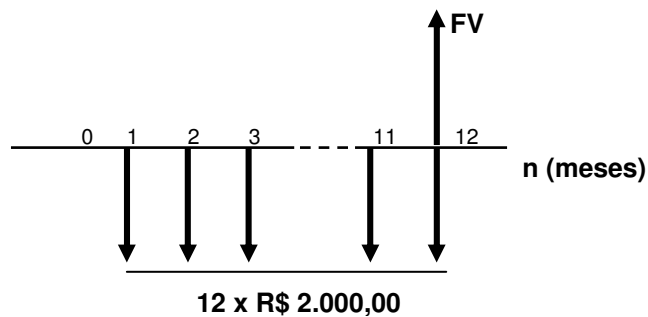
Entrada	Tecla função	Saída	Comentários
2.000	<b>CHS PMT</b>	- 2.000	Valor das parcelas
12	<b>n</b>	12	Número de parcelas
0,949	<b>i</b>	0,949	Taxa efetiva = $\left( (1 + 0,12)^{\frac{1}{12}} - 1 \right) \cdot 100 = 0,949$
	<b>FV</b>	<b>25.293,17</b>	<b>Valor a Futuro da Máquina</b>

**Exemplo 03:** Um equipamento foi financiado em 12 prestações de R\$ 2.000,00, mensais e sucessivas. Determinar o valor do equipamento a vista e o valor equivalente ao final de 12 meses, sabendo-se que o financiamento será realizado a juros compostos de 12% ao ano, e que a 1ª prestação vencerá na data da compra.



Na **HP 12C**, o cálculo é feito assim:

Entrada	Tecla função	Saída	Comentários
	<b>g 7</b>	Begin	Séries antecipadas
2.000	<b>CHS PMT</b>	- 2.000	Valor das parcelas
12	<b>n</b>	12	Número de parcelas
0,949	<b>i</b>	0,949	Taxa efetiva = $\left( (1 + 0,12)^{\frac{1}{12}} - 1 \right) \cdot 100 = 0,949$
	<b>PV</b>	<b>22.797,17</b>	<b>Valor a Vista da Máquina</b>



Na **HP 12C**, o cálculo é feito assim:

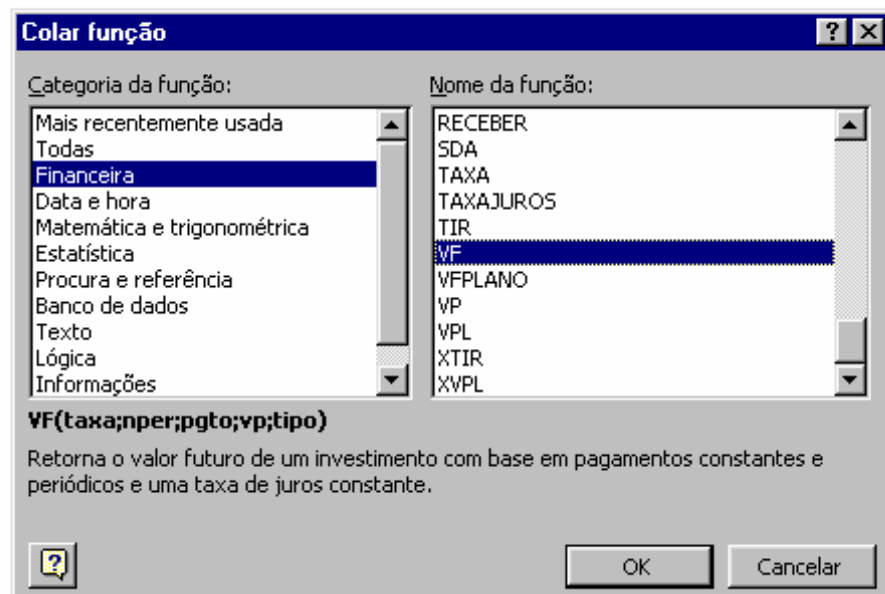
Entrada	Tecla função	Saída	Comentários
	<b>g 7</b>	Begin	Séries antecipadas
2.000	<b>CHS PMT</b>	- 2.000	Valor das parcelas
12	<b>n</b>	12	Número de parcelas
0,949	<b>i</b>	0,949	Taxa efetiva = $\left( (1 + 0,12)^{\frac{1}{12}} - 1 \right) \cdot 100 = 0,949$
	<b>FV</b>	<b>25.533,20</b>	<b>Valor a Futuro da Máquina</b>

## 6 - ASSISTENTE DE FUNÇÃO DO EXCEL

Agora que você já está habituado às fórmulas, vamos ver um pequeno treinamento de como utilizar as funções financeiras do EXCEL.

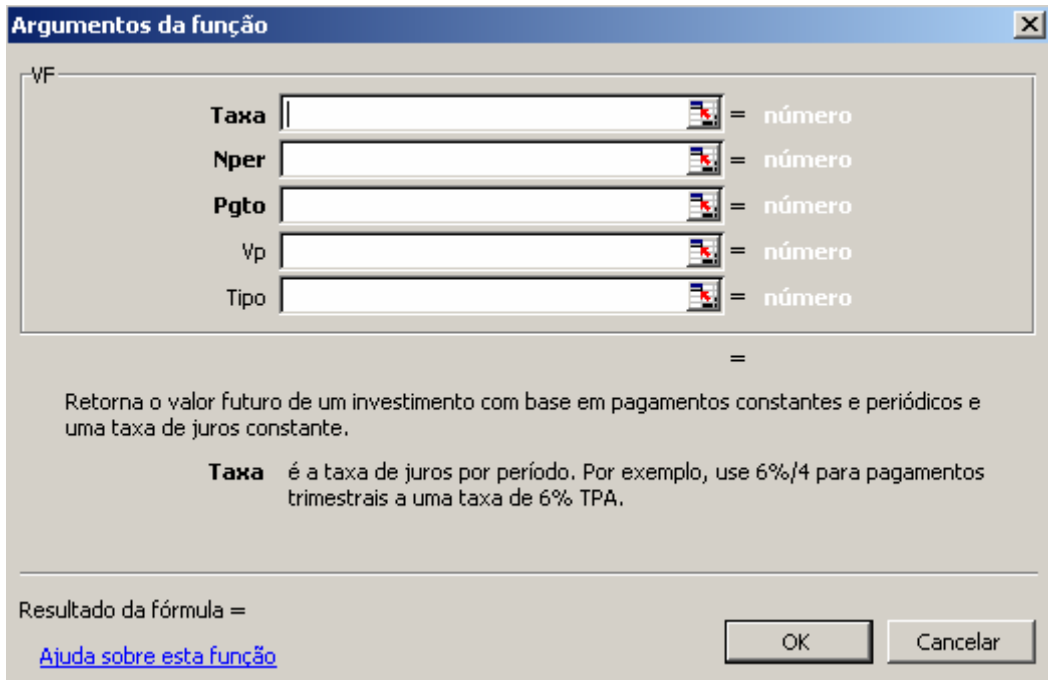
Como alternativa ao método de cálculo das variáveis descritas acima (VF, VP, i, n), o EXCEL oferece essas fórmulas prontas para uso. Utilizando o Assistente de Função do EXCEL você consegue fazer todos os cálculos demonstrados com muito mais facilidade, sem precisar inserir as fórmulas em cada um dos casos.

O menu Assistente de Função pode ser ativado pela barra de ferramentas, clicando com o mouse no botão **fx**. Esse botão abrirá a caixa de diálogo "Colar Função", conforme a da figura abaixo, onde se deve escolher a categoria da função que será utilizada.



Nesse caso, escolheremos as funções na categoria financeira, que agregam todas as funções da matemática financeira. Se estivermos calculando o valor futuro, por exemplo, escolheremos VF no nome da função e clicamos em OK.

A próxima caixa de diálogo será onde você deverá inserir os dados das outras variáveis, clicando no espaço destinado ao número e no respectivo valor na própria planilha (repare que nesse caso você verá que nos espaços reservados para os valores constarão as referências correspondentes).



Você já deve ter notado que o EXCEL tem uma notação para as variáveis que foram dadas acima no módulo. São elas:

<b>VP</b>	Valor Presente
<b>VF</b>	Valor Futuro
<b>Taxa</b>	Taxa de Juros
<b>nper</b>	Número de Períodos
<b>pgto</b>	entradas ou saídas de caixa durante o período total de transação
<b>tipo</b>	1= pgto no começo de cada período; 2 ou sem preenchimento =pgto no final do período

No caso dos cálculos dessas variáveis que iremos fazer agora, só usamos valores para três das quatro variáveis indicadas por setas vermelhas (a quarta variável é a calculada!)

Depois de fazer esses passos, clique no OK e o EXCEL calcula o valor pedido.

Vamos ver agora como calcular novamente os exemplos anteriores, usando, desta vez, o Assistente de Função.

**Exemplo:** Suponhamos que você tenha uma aplicação de R\$ 120.000,00, que rende, a juros compostos, 15% a.t. Quanto esperaria ter no final do ano, se aplicou seu dinheiro no primeiro dia do ano?

No **EXCEL**, o cálculo, usando o assistente de função, seria:

	A	B	C
1	<b>Dados</b>	<b>Valores</b>	<b>Lembrete</b>
2	Valor Presente ( C )	R\$ 120.000,00	inserir em <b>VP</b>
3	Taxa de Juros (a.t.)	15%	inserir em taxa
4	Período Aplicado	4,00	inserir em <b>nper</b>
5	Valor Futuro (VF)	-R\$ 209.880,75	nome de função: <b>VF</b>

No caso de usar o Assistente, não é necessário inserir nenhuma fórmula nas células. Porém, se colocar o cursor na célula de resultado da função verá uma fórmula editada. Essa é a fórmula do EXCEL, =VF(i ; n ; pgto ; PV), pela qual ele próprio calcula o valor da variável desejada. Se seguir o procedimento citado acima, aparecerá na sua célula de resultado do VF o seguinte: =VF(B3;B4;;B2)

**Não se esqueça!!!**

Os valores absolutos de VF e VP têm sempre sinais trocados!!!

	A	B	C
1	<b>Dados</b>	<b>Valores</b>	<b>Lembrete</b>
2	Valor Presente ( C )	R\$ 120.000,00	inserir em <b>VP</b>
3	Taxa de Juros (a.t.)	15%	inserir em taxa
4	Período Aplicado	4	inserir em <b>nper</b>
5	Valor Futuro (VF)	(R\$ 209.880,75)	nome de função: <b>VF</b>

**Argumentos da função**

VF

Taxa B3 = 0,15

Nper B4 = 4

Pgto = número

Vp B2 = 120000

Tipo = número

= -209880,75

Retorna o valor futuro de um investimento com base em pagamentos constantes e periódicos e uma taxa de juros constante.

**Vp** é o valor presente, ou a quantia total atual correspondente a uma série de pagamentos futuros. Quando não especificado, Vp = 0.

Resultado da fórmula = -209880,75

[Ajuda sobre esta função](#)

OK Cancelar

Na **HP 12C**, este cálculo pode ser resolvido da seguinte forma:

Entrada	Tecla função	Saída	
120000	<b>PV</b>	120.000,00	::> Valor Presente (PV)
15	<b>i</b>	15	::> Taxa de 15% a.t. (i)
4	<b>n</b>	4	::> Período de 4 trimestres (n)
	<b>FV</b>	-209.880,75	::> Calculo o Valor Futuro (FV)

**Exemplo:** Um empréstimo deve ser pago em 60 dias. O valor a ser pago é de R\$ 15.000,00. Os juros (compostos) do empréstimo são de 12% a.m. Qual o valor desse empréstimo se ele fosse pago hoje.

No **EXCEL**, o cálculo, usando o assistente de função, seria:

	A	B	C
1	<b>Dados</b>	<b>Valores</b>	<b>Lembrete</b>
2	Valor Futuro (VF)	R\$15.000,00	inserir em VF
3	Taxa de Juros (a.t.)	12%	inserir em taxa
4	Período Aplicado	2,00	inserir em nper
5	Valor Presente (VP)	-R\$11.957,91	nome da função: <b>VP</b>

VP: = VP(B3;B4;;B2)

	A	B	C
1	<b>Dados</b>	<b>Valores</b>	<b>Lembrete</b>
2	Valor Futuro (VF)	15.000,00	inserir em VF
3	Taxa de Juros (a.t.)	12%	inserir em taxa
4	Período Aplicado	2	inserir em nper
5	Valor Presente (VP)	(R\$ 11.957,91)	nome da função: <b>VP</b>

**Argumentos da função**

VP

Taxa B3 = 0,12

Nper B4 = 2

Pgto = número

Vf B2 = 15000

Tipo = número

= -11957,90816

Retorna o valor presente de um investimento: a quantia total atual de uma série de pagamentos futuros.

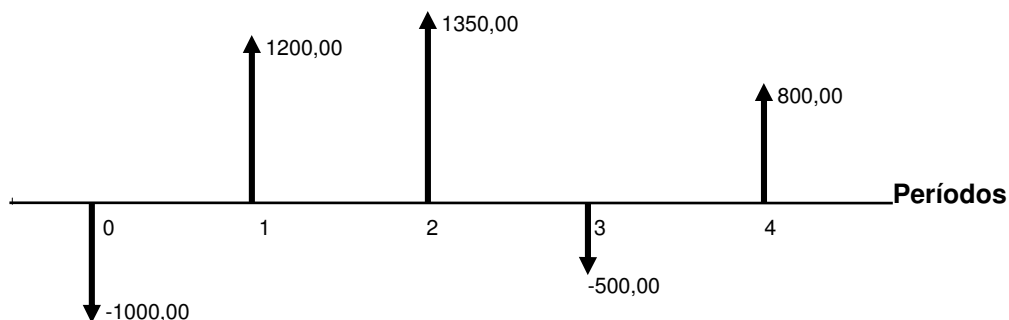
**Tipo** é um valor lógico: pagamento no início do período = 1; pagamento ao final do período = 0 ou não especificado.

Resultado da fórmula = (R\$ 11.957,91)

[Ajuda sobre esta função](#) OK Cancelar

## 7 – FLUXOS MONETÁRIOS E SEU EQUIVALENTE DESCONTADO: FMD

Um Fluxo Monetário consiste em uma seqüência de valores no tempo



Observe o diagrama, em que adotamos a convenção de posição de cada valor no fim do período correspondente. Se, de fato, os valores ocorrem ao longo do período, adotaremos a simplificação de concentrar os valores no fim do período.

Se adotarmos uma taxa de desconto  $r$ , é possível calcular o PV de cada um dos valores. Como todos os VP's estão referenciados no mesmo instante de tempo ( $t = 0$ ), é possível somá-los e obter um único valor chamado Fluxo Monetário Descontado – FMD:

$$FMD = \frac{A_1}{(1+r)^1} + \frac{A_2}{(1+r)^2} + \dots \quad FMD = \sum_{n=1}^t \frac{A_n}{(1+r)^n}$$

Adotando no exemplo  $r = 10\%$

$$FMD = -1000 + \frac{1200}{(1+0,1)^1} + \frac{1350}{(1+0,1)^2} - \frac{500}{(1+0,1)^3} + \frac{800}{(1+0,1)^4} \Rightarrow FMD = 1.377,36$$

No **EXCEL**, o cálculo, usando o assistente de função, seria:

	A	C				
1	Taxa de desconto	10%				
2	Periodo	0	1	2	3	4
3	Valor original	(1.000)	1.200	1.350	(500)	800
4	Correção no período	1	1,1	1,21	1,331	1,4641
5	Valor Descontado	(1.000,00)	1.090,91	1.115,70	(375,66)	546,41
6	<b>Calculo do FMD</b>					
7	Soma de B6 a F6	1.377,36				
8	Usando função VPL	1.377,36				

Fórmulas:

	A	B	C	D	E	F
1	Taxa de desconto	10%				
2	Periodo	0	1	2	3	4
3	Valor original	(1.000)	1.200	1.350	(500)	800
4	Correção no período	$= (1+B1)^{B3}$	$= (1+B1)^{C3}$	$= (1+B1)^{D3}$	$= (1+B1)^{E3}$	$= (1+B1)^{F3}$
5	Valor Descontado	$=B4/B5$	$=C4/C5$	$=D4/D5$	$=E4/E5$	$=F4/F5$
6	<b>Cálculo do FMD</b>					
7	Soma de B6 a F6	$=SOMA(B6:F6)$				
8	Usando função VPL	$=VPL(B1;C4:F4)+B4$				

### 7.1 - Caso 01: Marrecos & Cia.

Marrecos & Cia. estão estudando diversas alternativas para investimentos para o próximo ano. As quantias a serem investidas e as rendas anuais correspondentes estão indicadas a seguir. Todas as propostas têm a mesma vida de 20 anos, após os quais não há nada recuperável sobre o investimento inicial.

A firma considera seu custo de oportunidade em relação a não investir é de 10% ao ano, isto é, o retorno mínimo aceitável para empreender uma atividade é de 10% ao ano. Não há limitação de capital disponível, de modo que toda proposta julgada rentável será aceita. Somente é possível investir em um projeto de cada tipo. Quais os projetos que se qualificam?

Per.	Proposta	A	B	C	D	E	F
0	Investimento Inicial	(30.000)	(50.000)	(100.000)	(150.000)	(170.000)	(200.000)
1 a 20	Rec. Líquida Anual	3.250	6.500	8.500	17.650	11.750	24.200

<b>Taxa de desconto</b>	10%
<b>Periodos</b>	20

Proposta	Invest. Inicial	Rec. Liq. Anual	FMD	Resultado
A	(30.000)	3.250	(R\$ 2.330,92)	Rejeita
B	(50.000)	6.500	R\$ 5.338,16	Aceita
C	(100.000)	8.500	(R\$ 27.634,71)	Rejeita
D	(150.000)	17.650	R\$ 264,40	Aceita
E	(170.000)	11.750	(R\$ 69.965,63)	Rejeita
F	(200.000)	24.200	R\$ 6.028,24	Aceita

Fórmulas:

	A	B	C	D	E
1	<b>Taxa de desconto</b>		10%		
2	<b>Períodos</b>		20		
3					
4	<b>Prop.</b>	<b>Invest. Inicial</b>	<b>Rec. Liq. Anual</b>	<b>FMD</b>	<b>Resultado</b>
5	A	(30.000)	3.250	=-VP(C1;C2;C5)+B5	=SE(D5<0;"Rejeita";"Aceita")
6	B	(50.000)	6.500	=-VP(C1;C2;C6)+B6	=SE(D6<0;"Rejeita";"Aceita")
7	C	(100.000)	8.500	=-VP(C1;C2;C7)+B7	=SE(D7<0;"Rejeita";"Aceita")
8	D	(150.000)	17.650	=-VP(C1;C2;C8)+B8	=SE(D8<0;"Rejeita";"Aceita")
9	E	(170.000)	11.750	=-VP(C1;C2;C9)+B9	=SE(D9<0;"Rejeita";"Aceita")
10	F	(200.000)	24.200	=-VP(C1;C2;C10)+B10	=SE(D10<0;"Rejeita";"Aceita")

## 7.2 - Caso 02: Investimento e Custo do Capital

Para determinada tarefa de bombeamento em um reservatório, estamos analisando duas alternativas. Ambas as alternativas resultam em dez anos de serviço, sem valor residual para as instalações e equipamentos. Temos:

<b>Custos</b>	<b>Alternativa I</b>	<b>Alternativa II</b>
Custo Inicial das Tubulações	R\$ 2.500.000	R\$ 3.700.000
Custo Inicial das Bombas	R\$ 330.000	R\$ 320.000
Custo Anual da Energia para o Bombeamento	R\$ 325.402	R\$ 114.790

Neste problema não está especificado o valor da taxa de desconto. Observamos que a alternativa II exige maior investimento inicial, enquanto a alternativa I resulta em maiores custos operacionais de energia. Assim a escolha entre I e II vai depender do custo de oportunidade do capital, ou seja, da taxa de desconto. O ponto de indiferença é quando ambas as alternativas têm o mesmo Valor Presente ( $VP_I = VP_{II}$ )

Fórmulas:

	A	B	C
1	Custo do capital	i (será calculada)	
2	Período	10	
3	<b>Custos</b>	<b>Alternativa I</b>	<b>Alternativa II</b>
4	Custo Inicial das Tubulações	R\$ 2.500.000	R\$ 3.700.000
5	Custo Inicial das Bombas	R\$ 330.000	R\$ 320.000
6	Custo Anual da Energia para o Bombeamento	R\$ 325.402	R\$ 114.790
7	<b>VP I</b>	<b>=VP(B1;B2;B6)-B4-B5</b>	
8	<b>VP II</b>	<b>=VP(B1;B2;C6)-C4-C5</b>	
9	<b>VP I - VP II</b>	<b>=B7-B8</b>	

No **EXCEL**, o cálculo, usando o assistente de função, seria:

	A	B	C
1	Custo do capital	12%	
2	Período	10	
3	<b>Custos</b>	<b>Alternativa I</b>	<b>Alternativa II</b>
4	Custo Inicial das Tubulações	R\$ 2.500.000	R\$ 3.700.000
5	Custo Inicial das Bombas	R\$ 330.000	R\$ 320.000
6	Custo Anual da Energia para o Bombeamento	R\$ 325.402	R\$ 114.790
7	<b>VP I</b>	<b>(R\$ 4.668.587)</b>	
8	<b>VP II</b>	<b>(R\$ 4.668.587)</b>	
9	<b>VP I - VP II</b>	<b>(R\$ 0)</b>	
10			
11			
12			
13			
14			
15			
16			
17			

**Atingir meta** [X]

Definir célula:

Para valor:

Alternando célula:

OK Cancelar

Observe que as células B1 e B9 só assumiram os valores apresentados na planilha, 12% e 0 respectivamente, após a execução do attingir meta. Originalmente, o valor de B1 era zero.

### 7.3 - Caso 03: Ponto de Equilíbrio

Uma empresa tem um Custo de Oportunidade de 15% ao ano. Um projeto de fabricação de peças exige um investimento de R\$ 1.000.000 e o custo variável de produção é de R\$ 100 por peça. Observando que as peças poderão ser vendidas pelo preço de venda unitário de R\$ 500 e que o projeto terá 5 anos de duração (sem valor residual para o investimento inicial), calcule o ponto de equilíbrio (em volume produzido anualmente) para justificar o investimento.

A “anualização” por 5 anos do investimento inicial resulta num custo fixo anual de:

$$1.000.000 \text{ CHS PV}$$

$$5 n$$

$$15 i$$

$$\mathbf{PMT = ? = R\$ 298.316}$$

Para um volume “X” de peças anualmente produzidas, o custo total é:

$$CT = 298.316 + 100 \cdot X$$

Enquanto a receita total é de  $RT = 500 \cdot X$

Assim no Ponto de Equilíbrio:

$$RT = CT$$

$$X = \frac{298316}{500 - 100} \Rightarrow X = 746 \text{ peças por ano}$$

No **EXCEL**, o cálculo, usando o assistente de função, seria:

	A	B
1	Total de peças produzidas por ano	746
2		
3	Custo de Oportunidade	15%
4	Investimento Inicial	(1.000.000)
5	Custo Variavel Unitário	(100)
6	Número de período	5
7	Preço de Venda Unitário	500
8		
9	Custo Variável Anual	(74.579)
10	Receita Anual	372.894
11		
12	Valor presente dos Custos	1.250.000
13	Valor presente da Receita	(1.250.000)
14	<b>RESULTADO</b>	-

**Atingir meta**

Definir célula: B14

Para valor: 0

Alternando célula: \$B\$1

OK Cancelar

Fórmulas:

	A	B
1	Total de peças produzidas por ano	X (será calculado)
2		
3	Custo de Oportunidade	15%
4	Investimento Inicial	(1.000.000)
5	Custo Variavel Unitário	(100)
6	Número de período	5
7	Preço de Venda Unitário	500
8		
9	Custo Variável Anual	=B1*B5
10	Receita Anual	=B1*B7
11		
12	Valor presente dos Custos	=VP(B3;B6;B9)-B4
13	Valor presente da Receita	=VP(B3;B6;B10)
14	<b>RESULTADO</b>	<b>=B13+B12</b>

## 8 – SISTEMAS DE AMORTIZAÇÃO DE EMPRÉSTIMOS E FINANCIAMENTOS

### 8.1 – Sistema Francês

#### 8.1.1 - Sem Prazo de Carência:

Um empréstimo de R\$ 200.000,00 para ser pago em 4 parcelas mensais, à taxa de 2% a.m..

Cálculo da Prestação (PMT) na HP-12C

Entrada	Tecla função	Saída	
200.000	<b>PV</b>	120.000,00	::> Valor Presente (PV)
2	<b>i</b>	2	::> Taxa de 2% a.m. (i)
4	<b>n</b>	4	::> Período de 4 meses (n)
	<b>PMT</b>	-52.524,75	::> Calculo do Valor da Parcela (PMT)

Cálculo dos Juros:  $J = SD \times i = 200.000,00 \times 0,02 = 4.000,00$

N	Saldo Devedor	Amortização	Juros	Prestação
0	200.000,00	-	-	-
1	151.475,25	48.524,75	4.000,00	52.524,75
2	101.980,00	49.495,25	3.029,50	52.524,75
3	51.494,85	50.485,15	2.039,60	52.524,75
4	-	51.494,85	1.029,90	52.524,75
	Total	200.000,00	10.099,00	210.099,00

#### 8.1.2 - Com Prazo de Carência e Sem Capitalização dos Juros:

Um empréstimo de R\$ 200.000,00 para ser pago no prazo de 4 meses, à taxa de 2% a.m., com carência de 2 meses.

Calculo dos juros:  $J = C \times i = 200.000,00 \times 0,02 = 4.000,00$

Cálculo da Prestação (PMT) na HP-12C

Entrada	Tecla função	Saída	
200.000	<b>PV</b>	120.000,00	::> Valor Presente (PV)
2	<b>i</b>	2	::> Taxa de 2% a.m. (i)
2	<b>n</b>	2	::> Período de 2 meses (n)
	<b>PMT</b>	-103.009,90	::> Calculo do Valor da Parcela (PMT)

<b>N</b>	<b>Saldo Devedor</b>	<b>Amortização</b>	<b>Juros</b>	<b>Prestação</b>
0	200.000,00	-	-	-
1	200.000,00	-	4.000,00	4.000,00
2	200.000,00	-	4.000,00	4.000,00
3	100.990,10	99.009,90	4.000,00	103.009,90
4	-	100.990,10	2.019,80	103.009,90
	<b>Total</b>	<b>200.000,00</b>	<b>14.019,80</b>	<b>214.019,80</b>

### 8.1.3 - Com Carência e Capitalização de Juros:

Um empréstimo de R\$ 200.000,00 para ser pago no prazo de 4 meses, à taxa de 2% a.m., com carência de 2 meses e capitalização de juros no saldo devedor.

Cálculo do Saldo Devedor no Final do Segundo mês ( $FV_2$ ) na HP-12C

<b>Entrada</b>	<b>Tecla função</b>	<b>Saída</b>	
200.000,00	<b>PV</b>	200.000,00	::> Valor Presente (PV)
2	<b>i</b>	2	::> Taxa de 2% a.m. (i)
2	<b>n</b>	2	::> Período de 2 meses (n)
	<b>FV</b>	-208.080,00	::> Calculo do Valor do Futuro (FV)

Cálculo da Prestação (PMT) na HP-12C

<b>Entrada</b>	<b>Tecla função</b>	<b>Saída</b>	
208.080,00	<b>PV</b>	208.080,00	::> Valor Presente (PV)
2	<b>i</b>	2	::> Taxa de 2% a.m. (i)
2	<b>n</b>	2	::> Período de 2 meses (n)
	<b>PMT</b>	-107.171,50	::> Calculo do Valor da Parcela (PMT)

<b>N</b>	<b>Saldo Devedor</b>	<b>Amortização</b>	<b>Juros</b>	<b>Prestação</b>
0	200.000,00	-	-	-
1	204.000,00	-	-	-
2	208.080,00	-	-	-
3	105.070,10	103.009,90	4.161,60	107.171,50
4	-	105.070,10	2.101,40	107.171,50
	<b>Total</b>	<b>208.080,00</b>	<b>6.263,00</b>	<b>214.343,00</b>

### 8.2 - Sistema Price

É um caso particular do sistema francês, pois a taxa de juros é normalmente anual

e para se calcular o juro mensal utiliza-se a taxa proporcional linear em vez da taxa equivalente composta de juros.

Um empréstimo de R\$ 200.000,00 para ser pago em 4 parcelas mensais, à taxa de 12% a.a., de acordo com a tabela Price.

Cálculo da Taxa Mensal Proporcional Linear:  $12\% \div 12 = 1\%$

N	Saldo Devedor	Amortização	Juros	Prestação
0	200.000,00	-	-	-
1	150.743,78	49.256,22	2.000,00	51.256,22
2	100.995,00	49.748,78	1.507,44	51.256,22
3	50.748,73	50.246,27	1.009,95	51.256,22
4	-	50.748,73	507,49	51.256,22
	Total	200.000,00	5.024,88	205.024,88

### 8.3 – Sistema de Amortização Constante (SAC) ou Sistema Hamburguês

#### 8.3.1 - Sem Prazo de Carência:

Um empréstimo de R\$ 200.000,00 para ser pago em 4 parcelas mensais, à taxa de 1% a.m., de acordo com o sistema SAC.

Cálculo do Valor da Amortização:  $200.000,00 \div 4 = 50.000,00$ .

Cálculo da Prestação: Amortização + Juro

N	Saldo Devedor	Amortização	Juros	Prestação
0	200.000,00	-	-	-
1	150.000,00	50.000,00	2.000,00	52.000,00
2	100.000,00	50.000,00	1.500,00	51.500,00
3	50.000,00	50.000,00	1.000,00	51.000,00
4	-	50.000,00	500,00	50.500,00
	Total	200.000,00	5.000,00	205.000,00

#### 8.3.2 - Com Prazo de Carência

Um empréstimo de R\$ 200.000,00 para ser pago no prazo de 4 meses, à taxa de 1% a.m., com prazo de carência de 2 meses, de acordo com o sistema SAC.

Cálculo do Valor da Amortização:  $200.000,00 \div 2 = 100.000,00$

Cálculo da Prestação: Amortização + Juro

<b>N</b>	<b>Saldo Devedor</b>	<b>Amortização</b>	<b>Juros</b>	<b>Prestação</b>
0	200.000,00	-	-	-
1	200.000,00	-	2.000,00	2.000,00
2	200.000,00	-	2.000,00	2.000,00
3	100.000,00	100.000,00	2.000,00	102.000,00
4	-	100.000,00	1.000,00	101.000,00
	Total	200.000,00	7.000,00	207.000,00

### 8.3.3 - Com Prazo de Carência e Capitalização de Juros no Saldo.

Um empréstimo de R\$ 200.000,00 para ser pago no prazo de 4 meses, à taxa de 1% a.m., com prazo de carência de 2 meses e juros capitalizados no saldo, de acordo com o sistema SAC.

Cálculo do Valor da Amortização:  $204.020,00 \div 2 = 102.010,00$

<b>N</b>	<b>Saldo Devedor</b>	<b>Amortização</b>	<b>Juros</b>	<b>Prestação</b>
0	200.000,000	-	-	-
1	202.000,000	-	-	-
2	204.020,000	-	-	-
3	102.010,000	102.010,000	2.040,200	104.050,200
4	-	102.010,000	1.020,100	103.030,100
	Total	204.020,000	3.060,300	207.080,300

### 8.4 – Sistema Misto

Neste sistema as prestações, os juros e o saldo devedor são resultado da média aritmética entre os valores do SAC e do Sistema Francês.

Média Aritmética:  $[(\text{Valor Sistema Francês} + \text{Valor SAC}) \div 2]$  para todos os valores.

### 8.5 – Sistema Americano

No Sistema de Amortização Americano (SAA) a amortização do principal é feita no final do período contratado e os juros são pagos periodicamente.

#### 8.5.1 - Juros pagos na carência

Um empréstimo de R\$ 200.000,00, para ser pago no prazo de 4 meses, à taxa de 1% a.m..

N	Saldo Devedor	Amortização	Juros	Prestação
0	200.000,00	-	-	-
1	200.000,00	-	2.000,00	2.000,00
2	200.000,00	-	2.000,00	2.000,00
3	200.000,00	-	2.000,00	2.000,00
4	-	200.000,00	2.000,00	202.000,00
	Total	200.000,00	8.000,00	208.000,00

### 8.5.2 - Juros capitalizados no saldo devedor

Um empréstimo de R\$ 200.000,00, para ser pago no prazo de 4 meses, à taxa de 1% a.m..

Cálculo da Prestação:  $206.060,20 \times 1,01 = 208.120,80$ , onde 1,01 é  $1+i$ .

$208.120,80 - 200.000,00$  (Amortização) = 8.120,80 (Juros)

N	Saldo Devedor	Amortização	Juros	Prestação
0	200.000,00	-	-	-
1	202.000,00	-	-	-
2	204.020,00	-	-	-
3	206.060,20	-	-	-
4	-	200.000,00	8.120,80	208.120,80
	Total	200.000,00	8.120,80	208.120,80

### 8.6 – Exemplo: Planos Equivalentes de Financiamento

PLANO A - PAGAMENTO NO FINAL							
PRINCIPAL: \$ 1.000,00		TAXA DE JUROS: 8% a.a.			PRAZO: 4 ANOS		
ANOS	SALDO NO INÍCIO DO ANO	JUROS DO ANO	SALDO NO FINAL DO ANO ANTES PG.	PAGAMENTOS NO FINAL DO ANO			SALDO NO FINAL DO ANO APÓS PG.
				TOTAL	JUROS	AMORTIZ.	
0							1.000,00
1	1.000,00	80,00	1.080,00	0,00	0,00	0,00	1.080,00
2	1.080,00	86,40	1.166,40	0,00	0,00	0,00	1.166,40
3	1.166,40	93,31	1.259,71	0,00	0,00	0,00	1.259,71
4	1.259,71	100,78	1.360,49	1.360,49	360,49	1.000,00	0,00
			<b>SOMA</b>	<b>1.360,49</b>	<b>360,49</b>	<b>1.000,00</b>	

PLANO B – PAGAMENTOS PERIÓDICO DE JUROS							
PRINCIPAL: \$ 1.000,00			TAXA DE JUROS: 8% a.a.			PRAZO: 4 ANOS	
ANOS	SALDO NO INÍCIO DO ANO	JUROS DO ANO	SALDO NO FINAL DO ANO ANTES PG.	PAGAMENTOS NO FINAL DO ANO			SALDO NO FINAL DO ANO APÓS PG.
				TOTAL	JUROS	AMORTIZ.	
0							1.000,00
1	1.000,00	80,00	1.080,00	80,00	80,00	0,00	1.000,00
2	1.000,00	80,00	1.080,00	80,00	80,00	0,00	1.000,00
3	1.000,00	80,00	1.080,00	80,00	80,00	0,00	1.000,00
4	1.000,00	80,00	1.080,00	1.080,00	80,00	1.000,00	0,00
			<b>SOMA</b>	<b>1.320,00</b>	<b>320,00</b>	<b>1.000,00</b>	

PLANO C - PRESTAÇÕES IGUAIS - SISTEMA "PRICE"							
PRINCIPAL: \$ 1.000,00			TAXA DE JUROS: 8% a.a.			PRAZO: 4 ANOS	
ANOS	SALDO NO INÍCIO DO ANO	JUROS DO ANO	SALDO NO FINAL DO ANO ANTES PG.	PAGAMENTOS NO FINAL DO ANO			SALDO NO FINAL DO ANO APÓS PG.
				TOTAL	JUROS	AMORTIZ.	
0							1.000,00
1	1.000,00	80,00	1.080,00	301,92	80,00	221,92	778,08
2	778,08	62,25	840,33	301,92	62,25	239,67	538,40
3	538,40	43,07	581,48	301,92	43,07	258,85	279,56
4	279,56	22,36	301,92	301,92	22,36	279,56	0,00
			<b>SOMA</b>	<b>1.207,68</b>	<b>207,68</b>	<b>1.000,00</b>	

PLANO D - SISTEMA DE AMORTIZAÇÕES CONSTANTES - S.A.C.							
PRINCIPAL: \$ 1.000,00			TAXA DE JUROS: 8% a.a.			PRAZO: 4 ANOS	
ANOS	SALDO NO INÍCIO DO ANO	JUROS DO ANO	SALDO NO FINAL DO ANO ANTES PG.	PAGAMENTOS NO FINAL DO ANO			SALDO NO FINAL DO ANO APÓS PG.
				TOTAL	JUROS	AMORTIZ.	
0							1.000,00
1	1.000,00	80,00	1.080,00	330,00	80,00	250,00	750,00
2	750,00	60,00	810,00	310,00	60,00	250,00	500,00
3	500,00	40,00	540,00	290,00	40,00	250,00	250,00
4	250,00	20,00	270,00	270,00	20,00	250,00	0,00
			<b>SOMA</b>	<b>1.200,00</b>	<b>200,00</b>	<b>1.000,00</b>	

## 9 – CUSTO EFETIVO

Quando é cobrado unicamente juro nas operações de empréstimos e financiamentos, o custo efetivo, qualquer que seja o sistema de amortização adotado é a própria taxa de juro considerada (taxa contratada na operação).

Contudo as Instituições Financeiras cobram, além dos juros declarados, outros encargos, tais como IOC (Imposto sobre Operações Crédito), comissões, taxa administrativas, etc.. Estas despesas adicionais devem ser consideradas na planilha de desembolsos financeiros, onerando o custo efetivo da operação.

Exemplo: Um financiamento de R\$ 50.000,00 deve ser amortizado em 4 prestações anuais de R\$ 12.500,00 cada. O financiamento foi concedido sem carência. O custo da operação é constituído de juros 20% a.a. e IOC 4,5%, incidente sobre o valor do crédito e pago quando da liberação dos recursos. A Instituição Financeira cobra ainda uma taxa de 1% ao final de cada ano, incidente sobre o saldo devedor, a título de cobrir despesas administrativas de comissão e crédito.

N (Anos)	Saldo Devedor	IOC	Taxa Adm.	Amortização	Juros	Prestações
0	50.000,00	2.250,00	-	-	-	2.250,00
1	37.500,00	-	500,00	12.500,00	10.000,00	23.000,00
2	25.000,00	-	375,00	12.500,00	7.500,00	20.375,00
3	12.500,00	-	250,00	12.500,00	5.000,00	17.750,00
4	-	-	125,00	12.500,00	2.500,00	15.125,00
Total		2.250,00	1.250,00		25.000,00	78.500,00

Cálculo do Custo Efetivo da operação (i) na HP-12C

Entrada	Tecla função	Saída	
47.750,00	<b>CFo</b>	47.750,00	::> 50.000,00 – 2.250,00
23.000,00	<b>CHS CFj</b>	-23.000,00	::> 1ª parcela
20.375,00	<b>CHS CFj</b>	-23.375,00	::> 2ª parcela
17.750,00	<b>CHS CFj</b>	-17.750,00	::> 3ª parcela
15.125,00	<b>CHS CFj</b>	-15.125,00	::> 4ª parcela
	<b>IRR</b>	<b>23,70</b>	::> 23,70% a.a. é o custo efetivo da operação

## 10 – INTRODUÇÃO AOS MÉTODOS DE ANÁLISE DE INVESTIMENTOS

### 10.1 - Método da Taxa Interna de Retorno - IRR

#### 10.1.1 - Introdução

O método da taxa interna de retorno é muito utilizado na análise de investimentos mutuamente exclusivos, mas requer muito cuidado, pois quando mal aplicado conduz a decisões erradas. Na dúvida, deve-se preferir o método do valor presente líquido.

#### 10.1.2 - Exemplos Numéricos - Dois Investimentos Mutuamente Exclusivos

Considere os investimentos representados pelos seguintes fluxos de caixa:

Dois Investimentos Mutuamente Exclusivos				
Ano	Função HP-12C	Invest. - A	Função HP-12C	Invest. - B
0	50000 CHS CFo	(50000)	80000 CHS CFo	(80000)
1	15000 CFj	15000	23000 CFj	23000
2	5 Nj	15000	5 Nj	23000
3		15000		23000
4		15000		23000
5		15000		23000
<b>IRR</b>		<b>IRR</b>		<b>15,24% a. a.</b>

As taxas internas de retorno desses dois investimentos podem ser facilmente calculadas com a função financeira **IRR** da HP-12C. Os resultados são **15,24% a.a. para o investimento A** (R\$ 50.000) e **13,46% a.a. para o investimento B** (R\$ 80.000).

Vamos, agora, assumir que sua **taxa mínima de atratividade**, ou seja, **o seu custo de oportunidade** seja de 8% ao ano. Assim, se o seu dinheiro não for aplicado em nenhum desses investimentos ele estará aplicado nessa taxa de juros de 8% ao ano, a taxa mínima de atratividade. Como os dois investimentos oferecem taxa interna de retorno superior a 8% a.a., ambos seriam atrativos. Somos tentados, então, a optar pelo que apresenta a maior taxa interna de retorno: o investimento A (15,24% a.a.). **Porém, quem tomar essa decisão estará fazendo a opção correta?**

Para que o método da taxa interna de retorno seja corretamente utilizado é preciso que ele seja aplicado isoladamente em cada incremento de investimento.

A primeira decisão é aceitar, inicialmente, o investimento A, pois os R\$ 50.000

serão aplicados a 15,24% a.a., em vez de a 8% a.a., ou seja, a taxa mínima de atratividade, onde todo o seu dinheiro está investido. Agora precisamos decidir se, para completar os R\$ 80.000 necessários para viabilizar o investimento B, devemos tirar R\$ 30.000 do valor aplicado na taxa mínima de atratividade. Para tomarmos essa decisão precisamos determinar a taxa interna de retorno desses R\$ 30.000 quando aplicados no investimento B.

Vamos então calcular o incremento de investimento (B - A):

Ano	Funções HP-12C	Incremento (B - A)	Invest. - B	Invest. - A
0	30000 CHS CFo	(30.000)	(80.000)	(50.000)
1	8000 CFj	8.000	23.000	15.000
2	5 Nj	8.000	23.000	15.000
3		8.000	23.000	15.000
4		8.000	23.000	15.000
5		8.000	23.000	15.000
<b>IRR</b>	<b>IRR</b>	<b>10,42% a. a.</b>		

Devemos, portanto, optar pelo investimento B, pois assim o incremento de R\$ 30.000 passará a ser remunerado a 10,42% a.a., superior à taxa mínima de atratividade 8% a.a., que seria a sua remuneração se optássemos pelo investimento A de R\$ 50.000.

Investir R\$ 80.000 em B significa investir R\$ 50.000 à 15,24% a.a. e R\$ 30.000 à 10,42% a.a., fazendo com que o investimento total de R\$ 80.000 tenha uma taxa interna de retorno de 13,46% a.a.. Investir R\$ 50.000 em A significa investir R\$ 50.000 à 15,24% a.a. e deixar R\$ 30.000 investido na taxa mínima de atratividade de 8% a.a., o que certamente fará com que o investimento total de R\$ 80.000 tenha uma remuneração inferior à taxa de 13,46% a.a. do investimento B.

No método da taxa interna de retorno, a análise incremental exige a obtenção do fluxo de caixa B - A e o cálculo da sua taxa interna de retorno. Se não realizarmos essa operação podemos tomar decisões erradas.

## 10.2 - Método do Valor Presente Líquido

### 10.2.1 - O Método do Valor Presente Líquido

O *método do valor presente líquido* é extremamente simples de ser aplicado. Ele garante que o melhor investimento é aquele que apresenta o maior valor presente líquido positivo

### 10.2.2 - Exemplos Numéricos - Dois Investimentos Mutuamente Exclusivos

Considere os investimentos representados pelos seguintes fluxos de caixa:

Dois Investimentos Mutuamente Exclusivos		
Ano	Investimento A	Investimento B
0	(50.000)	(80.000)
1	15.000	23.000
2	15.000	23.000
3	15.000	23.000
4	15.000	23.000
5	15.000	23.000

Assumiremos que sua taxa mínima de atratividade, ou seja, o seu custo de oportunidade, seja de 8% ao ano. Assim, se o seu dinheiro não for aplicado em nenhum desses investimentos ele estará aplicado nessa taxa de juros de 8% ao ano, a taxa mínima de atratividade.

Para a análise via VPL, basta calcular o valor presente líquido do fluxo de caixa de cada investimento, usando a taxa mínima de atratividade de 8% a.a. como taxa de desconto e escolher o investimento de maior valor presente líquido positivo.

O Excel dispõe da função VPL (NPV) que calcula o valor presente líquido de qualquer fluxo de caixa. Se aplicarmos essa função, com a taxa de 8% a.a., nos fluxos de caixa do nosso exemplo teremos:

$$\mathbf{VPLA(8\%) = R\$ 9.890,65}$$

$$\mathbf{VPLB(8\%) = R\$ 11.832,33}$$

Como os valores presentes são positivos podemos afirmar que os dois investimentos têm taxa interna de retorno superior à taxa mínima de atratividade de 8% a.a. e, portanto, nenhum deles deve ser rejeitado.

Pelo método do valor presente líquido, devemos optar pelo investimento B.

Se calcularmos o valor presente líquido do incremento B-A, de R\$ 30.000, com a mesma taxa 8% a.a., encontraremos:

$$VPLB(8\%) - VPLA(8\%) = R\$ 11.823,33 - R\$ 9.890,65$$

$$\mathbf{VPLB(8\%) - VPLA(8\%) = R\$ 1.941,68}$$

Como esse valor presente líquido é positivo podemos afirmar que a taxa interna de retorno desse incremento de investimento é maior do que 8% a.a. e, portanto, o incremento deve ser aceito e, novamente, o escolhido deve ser o investimento B.

Lembre-se de que no método do valor presente líquido, ao escolhermos o investimento de maior valor presente líquido positivo, já estamos automaticamente fazendo a análise incremental dos investimentos, sem a necessidade de se calcular o fluxo de caixa do incremento B - A.

### 10.3 - Taxa Interna de Retorno X Valor Presente Líquido

#### 10.3.1 - Introdução

Dois métodos muito utilizados na análise de investimentos mutuamente exclusivos são o da taxa interna de retorno e o do valor presente líquido. Muito cuidado deve ser tomado quando da utilização do método da taxa interna de retorno, pois se for mal aplicado pode conduzir a decisões erradas

Na dúvida use o método do valor presente líquido, que é simples e funciona em todos os casos.

#### 10.3.2 - Exemplos Numéricos - Dois Investimentos Mutuamente Exclusivos

Considere os dois investimentos representados pelos fluxos de caixa indicados a seguir:

<b>Dois Investimentos Mutuamente Exclusivos</b>		
<b>Ano</b>	<b>Investimento A</b>	<b>Investimento B</b>
0	(1.000,00)	(1.000,00)
1	0,00	315,47
2	0,00	315,47
3	0,00	315,47
4	1.464,10	315,47
<b>Taxa Interna de Retorno</b>	<b>10,00% a.a.</b>	<b>10,00% a. a.</b>

As taxas internas de retorno desses dois investimentos podem ser facilmente calculadas com a função financeira TAXA (RATE) da planilha Excel, e os resultados obtidos são de 10,00% a.a. para os dois investimentos.

Vamos, agora, assumir que a taxa mínima de atratividade do investidor seja de 8% ao ano. Assim, se o dinheiro do investidor não for aplicado em nenhum desses investimentos estará aplicado nessa taxa de juros de 8% ao ano, pois esse é o seu custo de oportunidade.

Baseado nessas informações os dois investimentos, com o mesmo valor de R\$ 1.000,00, oferecem a taxa interna de retorno de 10% a.a., que é superior a 8% a.a.

Qual o investimento que devemos escolher?

**a) Análise pelo método do Valor Presente Líquido:**

O método do Valor Presente Líquido é extremamente simples. Basta calcular o Valor Presente Líquido do fluxo de caixa de cada investimento, usando como taxa de desconto a taxa mínima de atratividade de 8% a.a., e escolher o investimento de maior valor presente líquido positivo.

O Excel dispõe da função VPL (NPV) que permite a obtenção do valor presente líquido de qualquer fluxo de caixa. Cuidado que essa função considera os valores do fluxo de caixa numa ordem seqüencial, sendo que a primeira parcela é assumida como um *valor futuro* colocado no final do 1º período, e assim por diante. Assim, *não inclua* nos parâmetros da função VPL (NPV) o valor do investimento inicial de \$1.000,00, colocado no ponto zero da escala de tempo.

Se aplicarmos essa função, com a taxa de 8% a.a., nos fluxos de caixa do nosso exemplo, sem incluirmos os valores de (-) 1.000,00 do ponto zero, obteremos os valores presentes de R\$ 1.076,16 e R\$ 1.044,88, respectivamente, para os investimentos A e B. Os valores presentes líquidos são, finalmente, obtidos pelas relações:

$$\mathbf{VPLA (8\%) = (-)1.000,00 + 1.076,16 = \$ 76,16}$$

$$\mathbf{VPLB (8\%) = (-)1.000,00 + 1.044,88 = \$ 44,88}$$

Como os dois valores presentes líquidos são positivos, podemos afirmar que os dois investimentos têm taxa interna de retorno superior à taxa mínima de atratividade de 8% a.a.. Assim, não devemos rejeitar nenhum dos investimentos.

O método do valor presente líquido garante que o melhor investimento é aquele que apresenta o maior valor presente líquido positivo.

Portanto, no nosso exemplo, devemos optar pelo investimento A.

**b) Confirmação da Escolha pelo Valor Futuro Líquido:**

Inicialmente vamos calcular o valor futuro acumulado em cada investimento, sabendo que todo o dinheiro disponível ao longo dos quatro anos deve ser reaplicado na taxa mínima de atratividade de 8% a.a., que é o custo de oportunidade do investidor.

O valor futuro do investimento A, no final do 4º ano, é igual a R\$ 1.464,10, pois nesse caso não temos como realizar nenhuma reaplicação, uma vez que o fluxo de caixa não apresenta qualquer disponibilidade de caixa ao longo dos quatro anos.

Para acharmos o *valor futuro líquido* devemos levar o investimento inicial de R\$ 1.000,00, com o sinal negativo, para o final do 4º ano. Assim, teremos:

$$\text{VFLA (8\%)} = (-)1.000,00 \times 1,08^4 + 1.464,10$$

$$\text{VFLA (8\%)} = (-)1.360,49 + 1.464,10$$

$$\text{VFLA (8\%)} = \$103,61$$

O valor futuro do investimento B, no final do 4º ano, é obtido pela reaplicação das parcelas disponíveis ao longo dos quatro anos, conforme mostrado a seguir:

$$\text{Valor Futuro da parcela do 1º ano} = 315,47 \times 1,08^3 = \text{R\$ } 397,40$$

$$\text{Valor Futuro da parcela do 2º ano} = 315,47 \times 1,08^2 = \text{R\$ } 367,96$$

$$\text{Valor Futuro da parcela do 3º ano} = 315,47 \times 1,08 = \text{R\$ } 340,71$$

$$\text{Valor Futuro da parcela do 4º ano} = \text{R\$ } 315,47$$

$$\text{Valor Futuro - Total} = \text{R\$ } 1.421,54$$

Para acharmos o valor futuro líquido devemos levar o investimento inicial de R\$ 1.000,00, com o sinal negativo, para o final do 4º ano:

$$\text{VFLB(8\%)} = (-)1.000,00 \times 1,08^4 + 1.421,54$$

$$\text{VFLB(8\%)} = (-)1.360,49 + 1.421,54$$

$$\text{VFLB(8\%)} = \$61,05$$

No final do 4º ano o valor futuro líquido do investimento A (R\$ 103,61) é superior ao valor futuro líquido do investimento B (R\$ 61,05), justificando a nossa escolha pelo investimento A.

### c) Valor Presente Líquido e Valor Futuro Líquido:

Os métodos do valor presente líquido e do valor futuro líquido são absolutamente equivalentes. Isso pode ser confirmado pelas relações a seguir:

$$\text{VFLA(8\%)} = \text{VPLA (8\%)} \times 1,08^4 = 76,16 \times 1,36049 = \$103,61$$

$$\text{VFLB(8\%)} = \text{VPLB (8\%)} \times 1,08^4 = 44,88 \times 1,36049 = \$ 61,05$$

Assim tanto faz utilizar o valor presente líquido ou valor futuro líquido para a tomada de decisão.

### d) O Método da Taxa Interna de Retorno:

O método da taxa interna de retorno para ser corretamente utilizado precisa ser aplicado em cada incremento de investimento.

Como os dois investimentos têm o mesmo valor de R\$ 1.000,00, qual o incremento de investimento a considerar?

Na realidade o investimento incremental é um investimento teórico, inexistente na prática, representado pela diferença entre os dois fluxos de caixa, conforme indicado a seguir:

Investimento Incremental	
Ano	Incremento A - B
0	0,00
1	(315,47)
2	(315,47)
3	(315,47)
4	1.148,63
<b>Taxa Interna de Retorno</b>	<b>10,00% a. a.</b>

Devemos optar pelo investimento A e rejeitar o investimento B, pois o incremento (A -B) é remunerado a uma taxa de 10% a.a., que é superior à taxa mínima de atratividade de 8% a.a.. Se esse incremento de investimento (A -B) tivesse uma taxa interna de retorno inferior a 8% a.a. deveríamos rejeitar o investimento A e aceitar o investimento B.

*Porque fizemos a diferença (A - B) e não a diferença (B - A)?*

Simplesmente porque (B-A) não é um incremento de investimento.

Para termos um investimento incremental é necessário que a soma de todos os valores do fluxo de caixa incremental seja positiva. O valor positivo de \$202,22 corresponde ao total de juros recebidos ao longo dos quatro anos pelos investimentos de \$315,47 realizados ao final do 1º, 2º e 3º anos.

Assim, a escolha do investimento A pelo método da taxa interna de retorno coincide com a opção tomada pelo método do valor presente líquido.

#### e) Comentários sobre os métodos utilizados:

Vamos, agora, detalhar o cálculo da taxa interna de retorno dos dois investimentos:

Investimento A:

$$\mathbf{VPLA (10\%) = (-)1.000,00 + 1.464,10 / 1,10^4}$$

$$\mathbf{VPLA (10\%) = (-)1.000,00 + 1.000,00}$$

$$\mathbf{VPLA (10\%) = 0,00}$$

Investimento B:

$$\mathbf{VPLB (10\%) = (-)1.000,00 + 315,47/1,10 + 315,47/1,10^2 +}$$

$$\mathbf{+ 315,47/1,10^3 + 315,47/1,10^4}$$

$$\mathbf{VPLB (10\%) = (-) 1.000,00 + 286,79 + 260,72 + 237,02 + 215,47}$$

$$\mathbf{VPLB (10\%) = 0,00}$$

Podemos, então, representar os dois investimentos no quadro a seguir:

<b>Análise dos dois Investimentos mutuamente exclusivos</b>						
<b>Ano</b>	<b>Investimento A</b>	<b>Investimento B</b>				
		Parcela do 1.º ano	Parcela do 2.º ano	Parcela do 3.º ano	Parcela do 4.º ano	Total das Parcelas
0	(-) 1.000,00	(-) 286,79	(-) 260,72	(-) 237,02	(-) 215,47	(-)1.000,00
1	0,00	(+) 315,47	0,00	0,00	0,00	(+) 315,47
2	0,00		(+) 315,47	0,00	0,00	(+) 315,47
3	0,00			(+) 315,47	0,00	(+) 315,47
4	(+) 1.464,10				(+) 315,47	(+) 315,47
	\$ 1.000,00 a 10% a.a. em 4 anos	\$ 286,79 a 10% a.a. em 1 anos	\$ 260,72 a 10% a.a. em 2 anos	\$ 237,02 a 10% a.a. em 3 anos	\$ 215,47 a 10% a.a. em 4 anos	
	<b>Sem reaplicação</b>	Reaplicação a 8% a.a. por 3 anos	Reaplicação a 8% a.a. por 2 anos	Reaplicação a 8% a.a. por 1 ano	<b>Sem reaplicação</b>	

Os dois investimentos apresentam a mesma taxa interna de retorno de 10% a.a., mas, de acordo com o quadro que acabamos de ver:

- no investimento A, os \$1.000,00 estão sendo remunerados a uma taxa de 10% a.a., durante os quatro anos, permitindo o recebimento de \$1.464,10 no final do 4º ano;
- no investimento B, os \$ 1.000,00 estão sendo remunerados por meio de quatro parcelas aplicadas no início do 1º ano, da seguinte forma:
  - \$ 286,79 estão sendo remunerados a 10% a.a. durante 1 ano, permitindo o recebimento de \$315,47 no final do 1º ano;
  - \$ 260,72 estão sendo remunerados a 10% a.a. durante 2 anos, permitindo o recebimento de \$315,47 no final do 2º ano;
  - \$ 237,02 estão sendo remunerados a 10% a.a. durante 3 anos, permitindo o recebimento de \$315,47 no final do 3º ano;
  - \$ 215,47 estão sendo remunerados a 10% a.a. durante 4 anos, permitindo o recebimento de \$315,47 no final do 4º ano.

Com o desdobramento do investimento B nas suas quatro parcelas, podemos concluir que o melhor investimento é o A, pois:

- no investimento A, os \$ 1.000,00 estão sendo remunerados a 10% a.a. durante os quatro anos;
- no investimento B apenas uma parcela de \$215,47 está sendo remunerada a 10% a.a. durante os quatro anos. As demais parcelas que completam os \$1.000,00 estão sendo remuneradas a 10% a.a. em prazos inferiores a quatro anos, e as reaplicações são realizadas a 8% a.a. (taxa mínima de atratividade = custo de oportunidade do investidor).

O método do valor presente líquido indicou, com precisão e facilidade, o investimento A como a melhor opção para investir os \$1.000,00, na medida em que a taxa mínima de atratividade do investidor seja de 8% a.a.

A utilização do método da taxa interna de retorno conduz ao mesmo resultado do valor presente líquido, mas foi mais trabalhosa e teve que ser cuidadosamente aplicada.

A opção pelo investimento A será mantida para todos os valores da taxa mínima de atratividade que forem inferiores a 10% a.a.

Por último, o método do valor presente líquido já faz automaticamente as reaplicações de todas as disponibilidades de caixa na taxa mínima de atratividade do investidor, o que possibilita a tomada de decisão correta e com bastante simplicidade.

## 10.4 - Tempo de Recuperação ou Payback Period

### 10.4.1 - Introdução

O **método do tempo de recuperação**, ou *payback period*, é bastante utilizado na análise de investimentos. Vejamos, então, as suas vantagens e desvantagens.

O método do tempo de recuperação, na sua essência, mede a liquidez do investimento e não a sua rentabilidade, como fazem os métodos do valor presente líquido e da taxa interna de retorno.

Ele pode ser usado como complemento de outros métodos de avaliação de investimentos, mas nunca isoladamente, pois pode levar a decisões erradas.

### 10.4.2 - Exemplos Numéricos - Dois Investimentos Mutuamente Exclusivos

Considere dois investimentos X e Y, mutuamente exclusivos, bem como o investimento incremental (Y - X), todos como os seus fluxos de caixa representados no quadro a seguir:

<b>Dois Investimentos Mutuamente Exclusivos</b>			
<b>Ano</b>	<b>Investimento X</b>	<b>Investimento Y</b>	<b>Incremento (Y-X)</b>
0	(1.000,00)	(1.000,00)	(0,00)
1	6.000,00	3.000,00	(3.000,00)
2	5.000,00	4.000,00	(1.000,00)
3	4.000,00	5.000,00	1.000,00
4	3.000,00	7.000,00	4.000,00
<b>T.I.Retorno</b>	<b>32,98% a.a.</b>	<b>26,87% a. a.</b>	<b>9,14% a. a.</b>
<b>VPL (7% a.a.)</b>	<b>5.528,55</b>	<b>5.719,25</b>	<b>190,70</b>
<b>Payback Period</b>	<b>2 anos e 3 dias</b>	<b>2 anos e 11 meses</b>	

As taxas internas de retorno dos investimentos X e Y e do investimento incremental (Y-X), podem facilmente calculadas com a função financeira TIR (IRR) da planilha Excel. Os resultados obtidos são 32,98% a.a., 26,87% a.a. e 9,14% a.a., respectivamente.

Qual o investimento que deve ser escolhido por um investidor cuja taxa mínima de atratividade é de 7% ao ano?

Vamos responder essa questão usando os métodos do valor presente líquido e da taxa interna de retorno, e ainda com a utilização do método do tempo de recuperação.

**a) Método do Valor Presente Líquido:**

O método do valor presente líquido é extremamente simples. Basta calcular o valor presente líquido do fluxo de caixa de cada investimento, usando como taxa de desconto a taxa mínima de atratividade de 7% a.a., e escolher o investimento de maior valor presente líquido positivo.

O Excel dispõe da função VPL (NPV) que permite a obtenção do valor presente líquido de qualquer fluxo de caixa. Cuidado que essa função considera os valores do fluxo de caixa numa ordem seqüencial, sendo que a primeira parcela é assumida como um *valor futuro* colocado no final do 1º período, e assim por diante. Assim, *não inclui* nos parâmetros da função VPL (NPV) o valor do investimento inicial de \$1.000,00, colocado no ponto zero da escala de tempo.

Se aplicarmos essa função, com a taxa de 7% a.a., nos fluxos de caixa do nosso exemplo, obteremos os valores presentes líquidos de \$5.528,55 e \$5.719,25, respectivamente, para os investimentos X e Y.

Como os dois valores presentes líquidos são positivos podemos afirmar que os dois investimentos têm taxa interna de retorno superior à taxa mínima de atratividade de 7% a.a., e, portanto, não devem ser rejeitados.

O método do valor presente líquido garante que o *melhor investimento é aquele que apresenta o maior valor presente líquido positivo*.

Portanto, no nosso exemplo, devemos optar pelo investimento Y.

**b) Método da Taxa Interna de Retorno:**

Como as taxas internas dos dois investimentos são superiores à taxa mínima de atratividade, nenhum investimento deve ser rejeitado. A escolha do melhor investimento, pelo método da taxa interna de retorno, depende da taxa interna de retorno do investimento incremental.

Como os dois investimentos têm o mesmo valor de \$1.000,00, qual o incremento de

investimento a considerar?

Na realidade o investimento incremental é um investimento teórico, inexistente na prática, representado pela diferença entre os dois fluxos de caixa considerados.

Porque fizemos a diferença (Y-X) e não a diferença (X-Y)?

Simplesmente porque (X-Y) não é um incremento de investimento.

Para termos um investimento incremental é necessário que a soma de todos os valores do fluxo de caixa incremental seja positiva. O valor positivo de \$1.000,00 corresponde ao total de juros recebidos ao longo dos quatro anos pelos investimentos de \$3.000,00 e \$1.000,00 realizados ao final do 1º e do 2º anos.

Devemos optar pelo investimento Y e rejeitar o investimento X, pois o incremento (Y-X) é remunerado a uma taxa de 9,14% a.a., que é superior à taxa mínima de atratividade de 7% a.a.. Se esse incremento de investimento (Y-X) tivesse uma taxa interna de retorno inferior a 7% a.a. deveríamos rejeitar o investimento Y e aceitar o investimento X.

Assim, a escolha do investimento Y pelo método da taxa interna coincide com a opção tomada pelo método do valor presente líquido.

### c) **Método do Tempo de Recuperação:**

O tempo de recuperação de um investimento é o intervalo de tempo necessário para que o valor presente das entradas líquidas de caixa se iguale ao dos desembolsos. De forma resumida, é o período de tempo necessário para recuperar o investimento inicial.

No cálculo do valor presente dos recebimentos e desembolsos utiliza-se a taxa mínima de atratividade com taxa de desconto.

Vamos, então, mostrar a obtenção dos tempos de recuperação dos investimentos X e Y do nosso exemplo. No caso do investimento X temos o seguinte quadro:

Tempo de Reposição do Investimento X			
Ano	Valor (\$)	VPL de cada parcela a 7% a. a.	VPL acumulado até o ano
0	(10.000,00)	(10.000,00)	(10.000,00)
1	6.000,00	5.607,48	(4.392,52)
2	5.000,00	4.367,19	(25,33)
3	4.000,00	3.265,19	3.239,86
4	3.000,00	2.288,69	5.528,55

Observe no quadro que o VPL acumulado é negativo no ano 2 e positivo no ano 3, indicando que o tempo de recuperação está compreendido entre esses dois valores, pois

nesse intervalo o VPL se anula.

Por interpolação linear encontramos que o VPL será nulo no final de 2 anos e 3 dias, que é o tempo de recuperação do investimento X.

No caso do investimento Y, temos o seguinte quadro:

<b>Tempo de Reposição do Investimento Y</b>			
<b>Ano</b>	<b>Valor (\$)</b>	<b>VPL de cada parcela a 7% a. a.</b>	<b>VPL acumulado até o ano</b>
0	(10.000,00)	(10.000,00)	(10.000,00)
1	3.000,00	2.803,74	(7.196,26)
2	4.000,00	3.493,75	(3.702,51)
3	5.000,00	4.081,49	378,98
4	7.000,00	5.340,27	5.719,25

Observe que o VPL acumulado é negativo no ano 2 e positivo no ano 3, indicando que o tempo de recuperação está compreendido entre esses dois valores.

Por interpolação linear encontramos que o VPL será nulo no final de 2 anos e 11 meses, que é o tempo de recuperação do investimento Y.

Por esse método devemos escolher o investimento X por apresentar o menor tempo de recuperação, o que significa uma decisão contrária à indicada pelos métodos da taxa interna de retorno e do valor presente líquido.

Assim, se fôssemos considerar apenas o tempo de recuperação, a escolha recairia erradamente sobre o investimento X. Isto porque o investimento X tem as maiores entradas líquidas de caixa concentradas nos anos iniciais, o que não acontece com o investimento Y. Mas o investimento Y gera elevadas entradas líquidas de caixa nos anos finais, muito superiores às do investimento X.

O método do tempo de recuperação sofre de certa miopia analítica, não enxergando o que ocorre com o fluxo de caixa do investimento a partir do momento em que o capital inicial é recuperado.

### **Conclusão**

O método do tempo de recuperação ou payback period, na sua essência mede a liquidez do investimento e não a sua rentabilidade, como fazem os métodos do valor presente líquido e da taxa interna de retorno.

As vantagens desse método de análise são a simplicidade de cálculo e a facilidade de interpretação do resultado.

A desvantagem é que o método não deve ser usado isoladamente na avaliação de projetos, porque não considera os recebimentos que ocorrem após a recuperação do capital

investido, e pode levar a conclusões erradas. É melhor utilizá-lo como complemento de outros métodos.

Sua utilização, como instrumento complementar, é válida quando a análise for realizada por empresas com pouca disponibilidade de recursos financeiros (presente (têm interesse em investimentos com recuperação rápida do capital aplicado) ou quando estiver em jogo avaliação de projetos com alto risco (um período de recuperação curto é interessante em projetos arriscados).